Technische Universität Berlin

Fakultät II – Institut für Mathematik SS 15
A. Gündel-vom Hofe 20. Juli 2015

Juli – Klausur
Analysis III für Ingenieurwissenschaften

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Es ist nur ein handbeschriebenes A4-Blatt mit Notizen zugelassen. Taschenrechner und Formelsammlungen sind nicht zugelassen. Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4-Blättern abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Geben Sie im Rechenteil immer den **vollständigen Rechenweg** und im Verständnisteil, wenn nichts anderes gesagt ist, immer eine **kurze Begründung** an.

Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**.

Die Gesamtklausur ist mit 30 von 60 Punkten bestanden, wenn in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens 10 Punkte erreicht werden.

Korrektur

1	2	3	Σ_R	4	5	6	Σ_V	Σ

Rechenteil

1. Aufgabe 9 Punkte

Ermitteln Sie für die Funktion $\dfrac{3}{(z+1)(z-2)}$ eine Laurent-Reihe um die Stelle $z_0 = 1$, welche in einem Ringgebiet mit endlichen Innen- und Außenradien und Mittelpunkt z_0 konvergiert. Skizzieren Sie den in Frage kommenden Kreisring und machen Sie in Ihrer Rechnung kenntlich, wo Sie welche Konvergenzbedingungen einbringen.

Zur Bewertung: Für die Laurent-Reihe akzeptieren wir nur die folgenden Schreibweisen

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\cdots)(z-z_0)^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty}(\cdots)(z-z_0)^{n}, \quad \sum_{n=-1}^{-\infty}(\cdots)(z-z_0)^{n} + \sum_{n=0}^{\infty}(\cdots)(z-z_0)^{n}$$

$$\text{und} \sum_{n=-\infty}^{\infty}(\cdots)(z-z_0)^{n}.$$

2. Aufgabe 11 Punkte

Berechnen Sie die beiden Integrale

a) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{4+\cos\varphi}\,\mathrm{d}\varphi$ (6 Punkte) und b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+2x+5}\,\mathrm{d}x$ (5 Punkte)

durch Anwendung des Residuensatzes.
Hinweis: Teil b) darf mit einer Aussage aus dem Skript oder der Vorlesung berechnet werden. Eine Abschätzung braucht nicht durchgeführt zu werden.

Für Aufgaben 3-6 bitte wenden und 2. Blatt beachten!

3. Aufgabe

10 Punkte

Auf dem Winkelgebiet $H := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 < y < x\}$ ist das folgende Randwertproblem für eine harmonische Funktion $u\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben:

$$\begin{aligned} \Delta u(x,y) &= 0 \quad \text{für} \;\; (x,y) \in H \\ u(x,y) &= 2x^2 \quad \text{für} \;\; y = 0, \\ u(x,y) &= x^2 \quad \text{für} \;\; x = y. \end{aligned} \tag{$*$}$$

Weiter ist die analytische Abbildung $f : z \mapsto z^2$ gegeben.

a) Skizzieren Sie H und das Bildgebiet $G = f(H)$ und begründen Sie Ihre Wahl von G. (Tipp: Greifen Sie auf die Eulersche Darstellung komplexer Zahlen zurück.)

b) Stellen Sie das Randwertproblem für die Funktion U mit $U = u \circ f^{-1}$ auf dem Bildgebiet G auf.

c) Lösen Sie das Randwertproblem aus b) für U
mit Hilfe des Ansatzes $U(\xi, \eta) = A\xi + B\eta$.

d) Ermitteln Sie dann die Lösung $u(x,y)$ des ursprünglichen Randwertproblems $(*)$.
Hinweis zu d): Sollten Sie c) nicht lösen können (die Werte für A und B nicht gefunden), dann akzeptieren wir für d) auch die Lösung $u(x,y)$ mit unbekannten A und B.

Bitte 2. Blatt beachten!

Name: .... Matr.–Nr.: ....

Verständnisteil

4. Aufgabe

10 Punkte

Es sei $T\colon \mathbb{C}\cup\{\infty\} \to \mathbb{C}\cup\{\infty\}$ eine Möbius-Transformation, welche den I. Quadranten $\{z \in \mathbb{C} \mid \ \operatorname{Re} z > 0 \text{ und } \operatorname{Im} z > 0\}$ in den oberen Halbkreis $\{w \in \mathbb{C} \mid \ |w| < 1 \text{ und } \operatorname{Im} w > 0\}$ überführt und die Gleichung $T(\mathrm{i}) = \mathrm{i}$ erfüllt.

a) Zeigen Sie, dass es genau eine solche Möbius-Transformation T gibt.

b) Ermitteln Sie die konkrete Abbildungsvorschrift $w = T(z)$.

5. Aufgabe

10 Punkte

a) Skizzieren Sie die Kurve $\mathcal{C}:\ t \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}t},\ 0 \le t \le \frac{3\pi}{2}$.

b) Berechnen Sie das komplexe Kurvenintegral

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z$$

auf zwei verschiedene Weisen:

b1) als Parameterintegral

b2) mit Hilfe einer geeigneten Stammfunktion.

6. Aufgabe

10 Punkte

Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind, und geben Sie dabei jeweils eine Begründung an.
(Jede richtige und vollständig begründete Antwort gibt 2 Punkte. Antworten ohne Begründung oder mit einer falschen Begründung bringen keine Punkte.)
Antworten Sie bitte *nur* auf Ihren Lösungsblättern!

a) Die Funktion $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto \mathrm{e}^x \sin y$ ist harmonisch.

b) Die analytische Funktion $\log z$ stellt auf dem Schlitzgebiet $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0 \text{ oder } \operatorname{Im} z \neq 0\}$ eine konforme Abbildung dar.

c) Es gibt eine Möbius-Transformation, die den Streifen $\{z \in \mathbb{C} \mid 1 < \operatorname{Re} z < 2\}$ auf den Kreisring $\{w \in \mathbb{C} \mid 1 < |w| < 2\}$ abbildet.

d) Es gilt

$$\int\limits_{|z|=r} \frac{\sin z}{z-\pi}\,\mathrm{d}z = 0$$

für alle positiven reellen Zahlen r mit $r \neq \pi$.

e) Bei der komplexen Funktion $\dfrac{\mathrm{e}^{z^2}-1}{z^2}$ ist die Singularität $z_0 = 0$ hebbar.