Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik
G. Penn-Karras

SoSe 2016
07.10.2016

Oktober – Klausur
Analysis III für Ingenieure

Nachname: .... Vorname: ....
Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Neben einem handbeschriebenen A4 Blatt sind keine Hilfsmittel zugelassen.

Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Geben Sie im **Rechenteil** immer den **vollständigen Rechenweg** an.

Im **Verständnisteil** sollten die Aufgaben ohne großen Rechenaufwand mit den Kenntnissen aus der Vorlesung lösbar sein. Geben Sie immer eine **kurze Begründung** an.

Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**.

Die Gesamtklausur ist mit 30 von 60 Punkten bestanden, wenn in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens 10 von 30 Punkten erreicht werden.

Viel Erfolg!

Korrektur

Rechenteil:

1	2	3	Σ

Verständnisteil:

4	5	6	Σ

Rechenteil

1. Aufgabe 7 Punkte

Bestimmen Sie für das folgende DGL-System jeweils die Gleichgewichtspunkte und die zugehörigen Stabilitätseigenschaften.

$$\begin{cases} \dot{x} = -xe^y \\ \dot{y} = (x+1)(y^2-1) \end{cases} .$$

2. Aufgabe 10 Punkte

Gegeben sei die Funktion

$$f(z) = \frac{2}{z^2-1}.$$

a) Bestimmen Sie Art und Lage der Singularitäten von f.

b) Berechnen Sie zum Entwicklungspunkt $z_0 = 1$ alle möglichen Laurententwicklungen und geben sie den zugehörigen Konvergenzbereich der Reihe an.

Zur Bewertung: Für die Laurent-Reihe akzeptieren wir nur Schreibweisen die den Hauptteil bzw. den Nebenteil als Reihe der folgenden Form darstellen.

$$\sum(\cdots)(z-z_0)^{-k} \quad \text{oder} \quad \sum(\cdots)(z-z_0)^k.$$

3. Aufgabe 13 Punkte

Gegeben sei die Funktion $T(z) = \frac{z}{z-i}$.

a) Bestimmen Sie das Bild der imaginären Achse unter T.

b) Bestimmen Sie das Bild der rechten Halbebene $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) > 0\}$ unter T.

Die Funktion T bildet außerdem die Menge $\left\{z \in \mathbb{C} : |z - \frac{4}{3}i| = \frac{2}{3}\right\}$ auf den Kreis $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 2\}$ und die Gerade $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) = \frac{1}{2}\}$ auf den Einheitskreis ab.
(Das müssen Sie nicht nachrechnen)

c) Gegeben sei die Menge $G := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y - \frac{4}{3})^2 > \left(\frac{2}{3}\right)^2, y > \frac{1}{2}\right\}$. Lösen Sie das folgende Randwertproblem mit Hilfe der Methode der Verpflanzung mit der Funktion T.

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = 0, & (x,y) \in G \\ u(x, \frac{1}{2}) = 0, & x \in \mathbb{R} \\ u(x,y) = 2, & x^2 + (y - \frac{4}{3})^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \end{cases}$$

(Hinweis: Es ist $\mathrm{Re}(T(x+iy))^2 + \mathrm{Im}(T(x+iy))^2 = |T(x+iy)|^2 = \frac{x^2+y^2}{x^2+(y-1)^2}$.)

Verständnisteil

4. Aufgabe 13 Punkte

Es sei $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ eine analytische Funktion in $\mathbb{C}$ mit $v(x,y) = 2xy + y$. Weiter sei $f(0) = 0$.

a) Bestimmen Sie $f(x+iy)$ mit Hilfe einer zu v konjugiert harmonischen Funktion u.

b) Zeigen Sie, dass sich die in i) ermittelte Funktion als $f(z) = z^2 + z$ darstellen lässt.

c) Bestimmen Sie die Integrale

$$\text{(i)} \int\limits_{|z|=2} \frac{f(z)}{z^3}\,dz, \qquad \text{(ii)} \int\limits_{|z-4|=2} \log(z) f(z)\,dz, \qquad \text{(iii)} \int\limits_{|z|=2} \frac{f(z)}{z(z-1)}\,dz.$$

5. Aufgabe 9 Punkte

Skizzieren Sie die Menge G. Bestimmen Sie zu der gegebenen Menge G und der Abbildung $f : G \to \mathbb{C}$ das Bild $f(G)$. Geben Sie $f(G)$ in kartesischen oder Polarkoordinaten an und skizzieren Sie diese Menge.

a) $f(z) = z^2$, $\quad G = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) > 0, \operatorname{Re}(z) < 0\}$,

b) $f(z) = \log(z)$, $\quad G = \mathbb{C}\backslash]-\infty, 0] := \mathbb{C} \setminus (\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) \leq 0, \operatorname{Im}(z) = 0\}$,

c) $f(z) = \frac{1}{z}$, $\quad G = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 2\}$,

6. Aufgabe 8 Punkte

Begründen Sie die folgenden Aussagen oder geben Sie ein Gegenbeispiel.

a) Die Abbildung $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, f(z) = e^z - 4$, ist konform.

b) Auf der Menge $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist $\log(z)$ eine Stammfunktion von $\frac{1}{z}$.

c) Das lineare DGL-System

$$\begin{cases} \dot{x} = x + y \\ \dot{y} = 0 \end{cases}$$

ist in allen Gleichgewichtspunkten stabil, aber nicht asymptotisch stabil.

d) Sei $z = x + iy$. Die Abbildung

$$g : \mathbb{C} \to \mathbb{R}, \quad g(x+iy) = \sin(x)\cos(xe^{y^2+7x})$$

ist analytisch.