Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik
G. Penn-Karras

SS 16
01.08.2016

August – Klausur
Analysis III für Ingenieurswissenschaften
Lösungsskizze

1. Aufgabe

7 Punkte

Bestimmen Sie für das folgende DGL-System jeweils die Gleichgewichtspunkte und die zugehörigen Stabilitätseigenschaften.

$$\begin{cases} \dot{x} = -xe^y \\ \dot{y} = (x+1)(y^2-1) \end{cases} .$$

Das nichtlineare System hat einen GGP dort, wo $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ gilt.

Es folgt aus der ersten Gleichung $x = 0$ als einzige Lösung und somit in der zweiten Gleichung $y^2 - 1 = 0$.

Das heißt, die beiden GGP des Systems sind $\vec{x}_0 = (0, 1)$ und $\vec{x}_1 = (0, -1)$.

Zur Untersuchung der Stabilitätseigenschaften verwenden wir das Prinzip der Linearisierung. Mit

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} -xe^y \\ (x+1)(y^2-1) \end{pmatrix}$$

folgt

$$F'(x, y) = \begin{pmatrix} -e^y & -xe^y \\ y^2 - 1 & 2y(x+1) \end{pmatrix}.$$

Somit ist

$$F'(0, 1) = \begin{pmatrix} -e^1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix hat den positiven Eigenwert 2 und somit ist der GGP $(0, 1)$ instabil. Außerdem ist

$$F'(0, -1) = \begin{pmatrix} -e^{-1} & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Beide Eigenwerte sind negativ, somit ist der GGP asymptotisch stabil.

2. Aufgabe

10 Punkte

Gegeben sei die Funktion

$$f(z) = \frac{2}{z^2 - 1}.$$

a) Bestimmen Sie Art und Lage der Singularitäten von f.

b) Berechnen Sie zum Entwicklungspunkt $z_0 = 1$ alle möglichen Laurententwicklungen und geben sie den zugehörigen Konvergenzbereich der Reihe an.

Zur Bewertung: Für die Laurent-Reihe akzeptieren wir nur Schreibweisen die den Hauptteil bzw. den Nebenteil als Reihe der folgenden Form darstellen.

$$\sum(\cdots)(z - z_0)^{-k} \quad \text{oder} \quad \sum(\cdots)(z - z_0)^k.$$

$$f(z) = \frac{2}{z^2 - 1}$$

a) Die Singularitäten der Funktion ergeben sich als die Nullstellen des Nenners. Sie liegen also in $z_0 = 1$, $z_1 = -1$. Da der Zähler ungleich null ist und beiden Punkte einfache Nullstellen des Nenners sind, liegen also in beiden Punkten Pole erster Ordnung vor.

b) f hat die Partialbruchzerlegung

$$f(z) = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+1}.$$

Es gibt zwei Bereiche, in denen wir eine Reihenentwicklung vornehmen können.

Für den Bereich $I = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - 1| < 2\}$ entwickeln wir $\frac{1}{z+1}$ in eine Taylorreihe um 1. Es gilt

$$\frac{1}{z+1} = \frac{1}{z-1+2} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-\left(-\frac{z-1}{2}\right)} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{1}{2}\right)^k(z-1)^k$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}(z-1)^k.$$

Der Term $\frac{1}{z-1}$ ist bereits in der richtigen Form , d.h. die Reihe ist

$$f(z) = \frac{1}{z-1} - \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}(z-1)^k, \quad \text{für } 0 < |z-1| < 2.$$

Für den Bereich $II = \{z \in \mathbb{C} : |z - 1| > 2\}$ entwickeln wir $\frac{1}{z+1}$ in eine Laurentreihe um 1. Es gilt

$$\frac{1}{z+1} = \frac{1}{z-1+2} = \frac{1}{z-1}\frac{1}{1-\left(-\frac{2}{z-1}\right)} = \frac{1}{z-1}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k 2^k\left(\frac{1}{z-1}\right)^k$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}2^{k-1}\left(\frac{1}{z-1}\right)^k.$$

Insgesamt ist also

$$f(z) = \frac{1}{z-1} - \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}2^{k-1}\left(\frac{1}{z-1}\right)^k = -\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^{k-1}2^{k-1}\left(\frac{1}{z-1}\right)^k, \quad \text{für } |z-1| > 2.$$

3. Aufgabe

13 Punkte

Gegeben sei die Funktion $T(z) = \frac{z}{z-i}$.

a) Bestimmen Sie das Bild der imaginären Achse unter T.

b) Bestimmen Sie das Bild der rechten Halbebene $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) > 0\}$ unter T.

Die Funktion T bildet außerdem die Menge $\left\{z \in \mathbb{C} : |z - \frac{4}{3}i| = \frac{2}{3}\right\}$ auf den Kreis $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 2\}$ und die Gerade $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) = \frac{1}{2}\}$ auf den Einheitskreis ab.
(Das müssen Sie nicht nachrechnen)

c) Gegeben sei die Menge $G := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y - \frac{4}{3})^2 > \left(\frac{2}{3}\right)^2, y > \frac{1}{2}\right\}$. Lösen Sie das folgende Randwertproblem mit Hilfe der Methode der Verpflanzung mit der Funktion T.

$$\begin{cases} \Delta u(x, y) = 0, & (x, y) \in G \\ u(x, \frac{1}{2}) = 0, & x \in \mathbb{R} \\ u(x, y) = 2, & x^2 + (y - \frac{4}{3})^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \end{cases}$$

(Hinweis: Es ist $\mathrm{Re}(T(x + iy))^2 + \mathrm{Im}(T(x + iy))^2 = |T(x + iy)|^2 = \frac{x^2+y^2}{x^2+(y-1)^2}$.)

---

a) Wir wählen drei Punkte auf der imaginären Achse, z.B. $0, i, \infty$. Da T eine Möbiustransformation ist und die imaginäre Achse ein Kreis mit unendlichem Radiusïst, muss das Bild der Achse auch ein Kreis, der durch die Punkte $T(0), T(i), T(\infty)$ verläuft. Es ist

$$T(0) = 0, \quad T(i) = \infty, T(\infty) = 1.$$

Der einzige Kreis, der diese drei Punkte enthält, ist die reelle Achse.

b) Wir nutzen das Resultat aus a) und die Orientierungserhaltung von T. Wird die imaginäre Achse von unten nach oben durchlaufen, liegt die Menge rechts der Durchlaufrichtung. Also liegt die Bildmenge auch rechts der Durchlaufrichtung der reellen Achse. Die Bildpunkte werden in der Reihenfolge $T(0) = 0, \quad T(i) = \infty, T(\infty) = 1$, d.h. von rechts nach links durchlaufen. Somit ist die gesuchte Menge die obere Halbebene $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) > 0\}$.

c) Verpflanzen wir das Problem auf $T(G)$, ergibt sich

$$\begin{cases} \Delta v(x, y) = 0, & (x, y) \in T(G) \\ v(x, y) = 0, & \text{für } x^2 + y^2 = 1 \\ v(x, y) = 2, & \text{für } x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

Mit dem Ansatz $v(x, y) = A \cdot \ln(x^2 + y^2) + B \cdot 1$, ergibt sich aus der ersten Randbedingung

$$0 = A \cdot \ln(1) + B \cdot 1 \Rightarrow \underline{B = 0}$$

und aus der zweiten Randbedingung

$$2 = A \cdot \ln(4) \Rightarrow \underline{A = \frac{2}{\ln(4)}} \quad .$$

Das heißt, die Lösung ist

$$v(x,y) = \frac{2}{\ln(4)} \ln(x^2+y^2)$$

und mit Hilfe des Hinweises erhalten wir die Lösung auf G

$$u(x,y) = \frac{2}{\ln(4)} \ln\left(\mathrm{Re}^2(T(x+iy)) + \mathrm{Im}^2(T(x+iy))\right) = \underline{\frac{2}{\ln(4)} \ln\left(\frac{x^2+y^2}{x^2+(y-1)^2}\right)}.$$

---

4. Aufgabe

13 Punkte

Es sei $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ eine analytische Funktion in $\mathbb{C}$ mit $v(x,y) = 2xy + y$. Weiter sei $f(0) = 0$.

a) Bestimmen Sie $f(x+iy)$ mit Hilfe einer zu v konjugiert harmonischen Funktion u.

b) Zeigen Sie, dass sich die in i) ermittelte Funktion als $f(z) = z^2 + z$ darstellen lässt.

c) Bestimmen Sie die Integrale

(i) $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{f(z)}{z^3}\, dz,$ (ii) $\displaystyle\int_{|z-4|=2} \log(z) f(z)\, dz,$ (iii) $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{f(z)}{z(z-1)}\, dz.$

---

a) Gesucht ist also der Realteil u der analytischen Funktion f. f muss die Cauchy-Riemann-DGLs erfüllen. Es gilt

$$\frac{\partial v}{\partial y}(x,y) = 2x+1 \overset{!}{=} \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) \Rightarrow \underline{u(x,y) = x^2 + x + c(y)}.$$

Für die zweite DGL muss gelten $\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)$, d.h.

$$c'(y) \overset{!}{=} -2y \Rightarrow c(y) = -y^2 + c, c \in \mathbb{R}.$$

Insgesamt haben wir also

$$f(x+iy) = x^2 - y^2 + x + c + i\,(2xy + y)\,.$$

Wegen $f(0) = 0$ folgt $c = 0$.

b) Aus $f(z) = z^2 + z$ folgt

$$f(x+iy) = (x+iy)^2 + x + iy = \underbrace{x^2 - y^2 + x}_{=u(x,y)} + i\underbrace{(2xy+y)}_{=v(x,y)},$$

und damit genau das in a) berechnete Ergebnis.

c) (i)

$$\int_{|z|=2} \frac{f(z)}{z^3}\, dz = \int_{|z|=2} \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2}\, dz = 2\pi i \left(\mathrm{Res}(\frac{1}{z}, 0) + \mathrm{Res}(\frac{1}{z^2}, 0))\right) = 2\pi i (1+0) = \underline{2\pi i}.$$

(ii) Da f analytisch ist, ist auch $\log(z) f(z)$ eine analytische Funktion auf dem von der Kurve eingeschlossenen Bereich und es ist

$$\int_{|z-4|=2} \log(z) f(z)\, dz = 0.$$

(iii)

$$\int\limits_{|z|=2} \frac{f(z)}{z(z-1)}\,dz = \int\limits_{|z|=2} \frac{1}{z-1} + \frac{z}{z-1}\,dz = 2\pi i \left(\mathrm{Res}(\frac{1}{z-1},1) + \mathrm{Res}(\frac{z}{z-1},1)\right) = 2\pi i\,(1+1) = \underline{4\pi i}.$$

5. Aufgabe

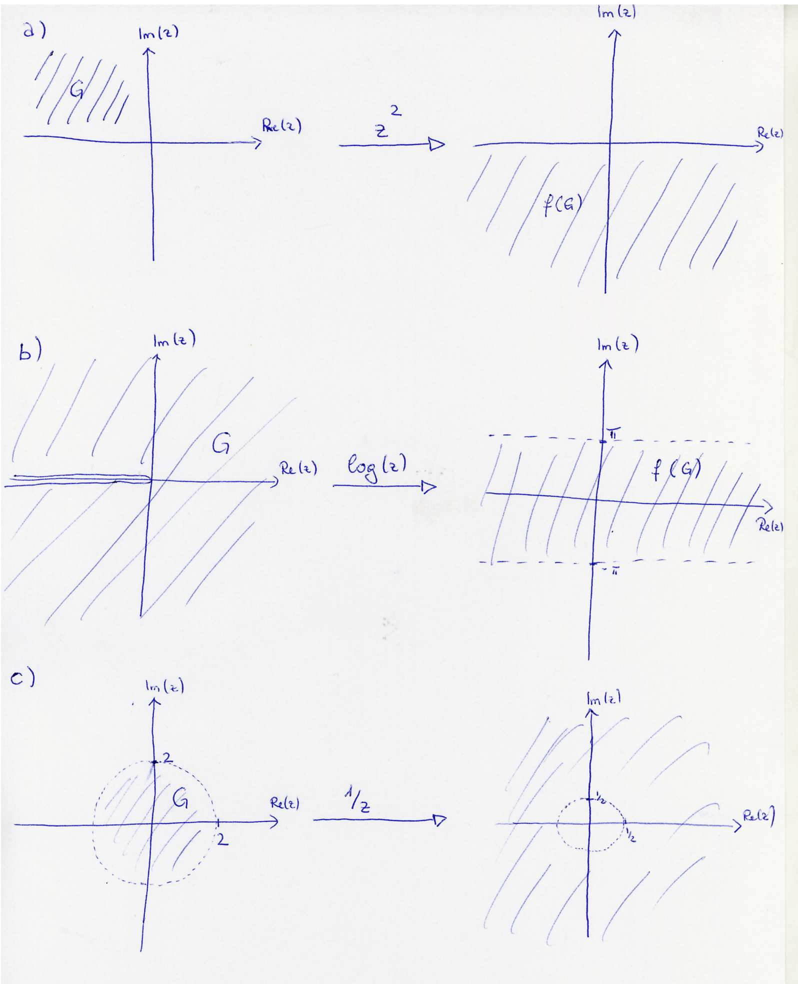
9 Punkte

Skizzieren Sie die Menge G. Bestimmen Sie zu der gegebenen Menge G und der Abbildung $f : G \to \mathbb{C}$ das Bild $f(G)$. Geben Sie $f(G)$ in kartesischen oder Polarkoordinaten an und skizzieren Sie diese Menge.

a) $f(z) = z^2$, $\quad G = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) > 0, \mathrm{Re}(z) < 0\}$,

b) $f(z) = \log(z)$, $\quad G = \mathbb{C}\setminus]-\infty, 0] := \mathbb{C} \setminus (\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) \leq 0, \mathrm{Im}(z) = 0\}$,

c) $f(z) = \frac{1}{z}$, $\quad G = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 2\}$,



a) z^2 verdoppelt das Argument jedes Punktes und quadriert den Radius. Es ist

$$f(G) = \left\{re^{i\varphi} : r > 0, \varphi \in]\pi, 2\pi[\right\}.$$

b) Da für alle Punkte in G gilt $\arg(z) \in\ ]-\pi, \pi[$, folgt für alle Punkte in $f(G)$

$$f(G) = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) \in]-\pi, \pi[\}.$$

c) Ist $r < 2$, so ist $\frac{1}{z} > \frac{1}{2}$. Somit ist

$$f(G) = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z| > \frac{1}{2} \right\}.$$

---

6. Aufgabe

8 Punkte

Begründen Sie die folgenden Aussagen oder geben Sie ein Gegenbeispiel.

a) Die Abbildung $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, f(z) = e^z - 4$, ist konform.

b) Auf der Menge $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist $\log(z)$ eine Stammfunktion von $\frac{1}{z}$.

c) Das lineare DGL-System

$$\begin{cases} \dot{x} = x + y \\ \dot{y} = 0 \end{cases}$$

ist in allen Gleichgewichtspunkten stabil, aber nicht asymptotisch stabil.

d) Sei $z = x + iy$. Die Abbildung

$$g : \mathbb{C} \to \mathbb{R}, \quad g(x + iy) = \sin(x) \cos(xe^{y^2+7x})$$

ist analytisch.

---

a) Richtig! Es gilt $f'(z) = e^z \neq 0, \forall z \in \mathbb{C}$.

b) Falsch! Der Logarithmus ist z.B. in -1 nicht definiert. Dort ist $\log(z)$ also keine Stammfunktion.

c) Falsch! Es ist $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Die Eigenwerte sind also 1 und 0. Da es einen positiven Eigenwert gibt, ist das System instabil.

d) Falsch! Eine reellwertige Funktion ist nur dann analytisch, wenn sie konstant ist. g ist nicht konstant, also auch nicht analytisch.