Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik SS 17
A. Gündel-vom Hofe 31. Juli 2017

Juli – Klausur
Analysis III f. Ing.

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Es ist nur ein handbeschriebenes A4-Blatt mit Notizen zugelassen. Taschenrechner und Formelsammlungen sind nicht zugelassen. Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4-Blättern abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Geben Sie im Rechenteil immer den **vollständigen Rechenweg** und im Verständnisteil, wenn nichts anderes gesagt ist, immer eine **kurze Begründung** an.

Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**.

Die Gesamtklausur ist mit 30 von 60 Punkten bestanden, wenn in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens 10 Punkte erreicht werden.

Korrektur

1	2	3	Σ_R	4	5	6	Σ_V	Σ

Rechenteil

1. Aufgabe 10 Punkte

Es gibt genau eine Möbius-Transformation T, die die von links nach rechts durchlaufene reelle Achse $\rightarrow$ auf sich sowie den positiv durchlaufenen Einheitskreis $\circlearrowleft$ auf den negativ durchlaufenen Einheitskreis $\circlearrowright$ abbildet,

$$T(\rightarrow) = \rightarrow, \quad T(\circlearrowleft) = \circlearrowright,$$

und außerdem die Eigenschaft $T(3) = \frac{1}{3}$ besitzt.

Ermitteln Sie anhand dieser Angaben die Möbius-Transformation T.

2. Aufgabe 10 Punkte

Berechnen Sie die Integrale mit Hilfe der Integralformel von Cauchy (C.I.F.) oder des Residuensatzes:

$$\text{a)} \int_0^{2\pi} \frac{1}{3 + 2\cos\varphi}\,\mathrm{d}\varphi, \qquad \text{b)} \int\limits_{|z-1|=3} \frac{z^2}{1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}\,\mathrm{d}z.$$

3. Aufgabe 10 Punkte

Das Gebiet H, definiert durch

$$H := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x > -y > 0\},$$

stellt ein Winkelgebiet im IV. Quadranten dar.

Skizzieren Sie das Gebiet H und
lösen Sie das folgende Randwertproblem:
Gesucht ist eine zweimal stetig differenzierbare reelle Funktion $u\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned} &\Delta u(x, y) = 0 \quad \text{für } (x, y) \in H, \\ &u(t, 0) = 2t^2, \quad u(t, -t) = t^2 \qquad \text{für } t > 0. \end{aligned}$$

Verwenden Sie zur Lösung die Methode der harmonischen Verpflanzung mit der Verpflanzungsabbildung $f(z) = \mathrm{i}z^2$ und wählen Sie als Ansatzfunktionen die harmonischen Funktionen x und y.

Bitte 2. Blatt beachten!

Verständnisteil

4. Aufgabe

10 Punkte

Betrachten Sie die punktierte Kreisscheibe A mit $A := \{z \in \mathbb{C} \,|\, 0 < |z-1| < 1\}$.

Ermitteln Sie für jede der nachfolgenden Funktionen die Laurent-Entwicklungen auf A (mit Entwicklungspunkt 1) und geben Sie dabei an, von welcher Art die Singularität 1 ist.

$$\text{a) } \mathrm{e}^{\frac{1}{(z-1)^2}}, \qquad \text{b) } \frac{1}{(z-1)(z-2)}, \qquad \text{c) } \frac{z(z-2)}{z-1}, \qquad \text{d) } \frac{z^2-1}{z-1}.$$

Hinweis: Für $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$\mathrm{e}^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \ .$$

5. Aufgabe

10 Punkte

Berechnen Sie die komplexen Integrale

$$\text{a) } \int_{\mathcal{C}} \frac{1}{z-\mathrm{i}} \,\mathrm{d}z \quad \text{mit } \mathcal{C} \,:\, t \mapsto -1 + \mathrm{i}t, \ -1 \le t \le 1;$$

$$\text{b) } \int_{|z|=1} \frac{\mathrm{e}^{z^2}}{z^{11}} \,\mathrm{d}z.$$

Quadratwurzeln und Winkelfunktionen brauchen nicht ausgewertet zu werden.

Hinweis: Für $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$\mathrm{e}^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \ .$$

Bitte wenden!

6. Aufgabe

10 Punkte

Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind, und geben Sie dabei jeweils eine Begründung an.
(Jede richtige und vollständig begründete Antwort gibt 2 Punkte. Antworten ohne Begründung oder mit einer falschen Begründung bringen keine Punkte.)
Antworten Sie bitte *nur* auf Ihren Lösungsblättern!

a) Die komplexe Funktion $(\overline{z})^2$ ist für $z = 1$ komplex-differenzierbar.

b) Die komplexe Funktion z^2 bildet jedes Winkelgebiet mit Scheitel 0 und Öffnungswinkel α mit $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ konform auf ein Winkelgebiet ab.

c) Es gilt
$$\int\limits_{|z-2|=1} \frac{\sin \frac{1}{z}}{z^2 - 16} \, \mathrm{d}z = 0.$$

d) Besitzt eine auf $\mathbb{C} \setminus \{2\}$ analytische Funktion f an der Stelle 2 einen Pol 2. Ordnung, so gilt $\operatorname{Res}(f(z), 2) = 0$.

e) Es gilt
$$\lim_{R\to\infty} \int\limits_{|z|=R} \frac{1}{z} \, \mathrm{d}z = 2\pi \mathrm{i}.$$