Technische Universität Berlin

Fakultät II – Institut für Mathematik SS 17

A. Gündel-vom Hofe 25. September 2017

September – Klausur
Analysis III f. Ing.

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Es ist nur ein handbeschriebenes A4-Blatt mit Notizen zugelassen. Taschenrechner und Formelsammlungen sind nicht zugelassen. Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4-Blättern abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Geben Sie im Rechenteil immer den **vollständigen Rechenweg** und im Verständnisteil, wenn nichts anderes gesagt ist, immer eine **kurze Begründung** an.

Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**.

Die Gesamtklausur ist mit 30 von 60 Punkten bestanden, wenn in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens 10 Punkte erreicht werden.

Korrektur

1	2	3	Σ_R	4	5	6	Σ_V	Σ

Musterlösung Klausur Analysis III f. Ing., 25. September 2017

Rechenteil

1. Aufgabe 10 Punkte

a) Die untere komplexe Halbebene liegt rechts von der von links nach rechts durchlaufenen reellen Achse $\rightarrow$. Auf der reellen Achse werden die Punkte $-1, 0, \infty$ in dieser Reihenfolge durchlaufen. Die Bildpunkte sind $-1, \infty, 0$. Damit wird die reelle Achse von rechts nach links durchlaufen: $T(\rightarrow) = \leftarrow$.

Die Orientierungstreue von T ergibt folglich, dass das Bild der unteren Halbebene die obere Halbebene $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$.

b) Mit $T(0) = \infty$ hat man

$$T(z) = \frac{az + b}{z} = a + \frac{b}{z}.$$

$T(\infty) = 1$ liefert dann $a = 1$. Mit $T(-1) = -1$ hat man die Gleichung $-1 = 1 - b$ nach b aufzulösen, es ergibt sich $b = 2$. Es gilt

$$T(z) = 1 + \frac{2}{z} = \frac{z + 2}{z}.$$

c) Mit $T(1) = 3$ und $T(\mathrm{i}) = 1 - 2\mathrm{i}$ werden die drei Kreispunkte $1, \mathrm{i}, -1$ auf $3, 1 - 2\mathrm{i}, -1$ abgebildet. Eine Skizze zeigt, dass der Bildkreis den Mittelpunkt 1 und den Radius 2 hat und negativ durchlaufen wird.

2. Aufgabe

10 Punkte

a) Es gilt

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{6+2\mathrm{i}\sin\varphi}\,\mathrm{d}\varphi = -\mathrm{i}\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}}{6+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}}\cdot \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\,\mathrm{d}\varphi$$
$$= -\mathrm{i}\int\limits_{|z|=1} \frac{z^{-1}}{6+z-z^{-1}}\,\mathrm{d}z = -\mathrm{i}\int\limits_{|z|=1} \frac{1}{z^2+6z-1}\,\mathrm{d}z.$$

Das Polynom z^2+6z-1 hat die einfachen Nullstellen $-3+\sqrt{10}$ und $-3-\sqrt{10}$ Nur die erste Nullstelle liegt innerhalb des Einheitskreises. Damit gilt

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{6+2\mathrm{i}\sin\varphi}\,\mathrm{d}\varphi = -\mathrm{i}\int\limits_{|z|=1} \frac{1}{z^2+6z-1}\,\mathrm{d}z$$
$$= -\mathrm{i}\cdot 2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}\left(\frac{1}{z^2+6z-1}, -3+\sqrt{10}\right)$$
$$= -\mathrm{i}\cdot 2\pi\mathrm{i}\left(\frac{1}{2z+6}\right)\Bigg|_{z=-3+\sqrt{10}} = -\mathrm{i}\cdot 2\pi\mathrm{i}\frac{1}{2\sqrt{10}} = \frac{\pi}{\sqrt{10}}.$$

b) Der Nenner hat alle geraden ganzen Zahlen als Nullstellen. Nur die Nullstelle 2 liegt innerhalb des Kreises $|z-2| = \frac{3}{2}$. Damit gilt

$$\int\limits_{|z-2|=\frac{3}{2}} \frac{z^2+1}{\sin\left(\frac{\pi}{2}z\right)}\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}\left(\frac{z^2+1}{\sin\left(\frac{\pi}{2}z\right)}, 2\right).$$

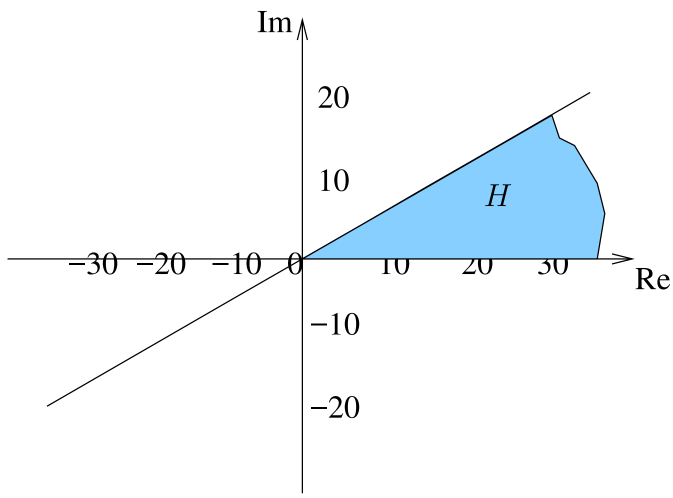
Die Ableitung des Nenners des Integranden ist gleich $\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}z\right)$, was für $z=2$ von Null verschieden ist. Folglich

$$\int\limits_{|z-2|=\frac{3}{2}} \frac{z^2+1}{\sin\left(\frac{\pi}{2}z\right)}\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\left(\frac{z^2+1}{\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}z\right)}\right)\Bigg|_{z=2} = 2\pi\mathrm{i}\cdot\frac{5}{\frac{\pi}{2}\cdot(-1)} = -20\mathrm{i}.$$

3. Aufgabe

10 Punkte

Skizze eines Winkelgebiets im I. Quadranten, begrenzt von x-Achse und Gerade $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$. *Ein Bildchen wird verlangt.*



Die Verpflanzungsabbildung f entspricht im $\mathbb{R}^2$ der Abbildung

$$(x, y) \mapsto (x^3 - 3xy^2, 3x^2y - y^3).$$

Der Randkurve $(t, 0)$ mit $0 < t < \infty$ entspricht in der Bildebene die Randkurve $(t^3, 0)$.

Der Randkurve $(t, \frac{1}{\sqrt{3}}t)$ mit $0 < t < \infty$ entspricht in der Bildebene die Randkurve $(0, \frac{8}{3\sqrt{3}}t^3)$.

Nebenrechnung für schräge Randkurve:

$$3x^2y - y^3 = 3t^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}t - \frac{1}{3\sqrt{3}}t^3 = \left(\frac{9}{3\sqrt{3}} - \frac{1}{3\sqrt{3}}\right)t^3 = \frac{8}{3\sqrt{3}}t^3.$$

(Damit ist das Bild $f(H)$ der I. Quadrant.)

Für die Funktion U mit $U = u \circ f^{-1}$ gilt demnach

$$u(t, 0) = t^3 = U(t^3, 0), \qquad u(t, \tfrac{1}{\sqrt{3}}t) = \tfrac{8}{3\sqrt{3}}t^3 = U(0, \tfrac{8}{3\sqrt{3}}t^3).$$

Die Funktion U löst das Randwertproblem

$$\begin{aligned} &\Delta U(x', y') = 0 \quad \text{für } (x, y) \in f(H), \\ &U(x', 0) = x' \quad \text{für } x' > 0 \\ &U(0, y') = y' \quad \text{für } y' > 0. \end{aligned}$$

Mit dem Ansatz

$$U(x', y') = Ax' + By'$$

findet man sofort $A = B = 1$ und damit

$$U(x', y') = x' + y'.$$

Mit $u = U \circ f$ findet man die Lösung des gestellten Randwertproblems:

$$u(x, y) = U(x^3 - 3xy^2, 3x^2y - y^3) = x^3 - 3xy^2 + 3x^2y - y^3.$$

Verständnisteil

4. Aufgabe

10 Punkte

a) Es ist mit $z = x + \mathrm{i}y$, $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\overline{z}\mathrm{e}^z = (x - \mathrm{i}y)\mathrm{e}^x(\cos y + \mathrm{i}\sin y) = \mathrm{e}^x(x\cos y + y\sin y) + \mathrm{i}\mathrm{e}^x(-y\cos y + x\sin y).$$

Damit ist

$$u(x, y) = \mathrm{e}^x(x\cos y + y\sin y), \quad v(x, y) = \mathrm{e}^x(-y\cos y + x\sin y).$$

b) Die erste Cauchy-DGL $u_x = v_y$ führt bereits zu einem Widerspruch:

$$u_x(x, y) = \mathrm{e}^x(x\cos y + y\sin y + \cos y), \quad v_y(x, y) = \mathrm{e}^x(-\cos y + y\sin y + x\cos y).$$

Für $z = 0$ ist insbesondere

$$u_x(0, 0) = 1, \quad v_y(0, 0) = -1,$$

also $u_x(0, 0) \neq v_y(0, 0)$. Eine CR-DGL ist für $z = 0$ nicht erfüllt, damit ist f für $z = 0$ nicht komplex-differenzierbar.

c) Auf dem Einheitskreis gilt $\overline{z} = z^{-1}$, somit gilt mit Verwendung von C.I.F.:

$$\int_{|z|=1} \overline{z}\mathrm{e}^z \,\mathrm{d}z = \int_{|z|=1} \frac{\mathrm{e}^z}{z} \,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i} \cdot \mathrm{e}^0 = 2\pi\mathrm{i}.$$

Wir haben also

$$\int_{|z|=1} \overline{z}\mathrm{e}^z \,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}.$$

5. Aufgabe

10 Punkte

a) Die Kurve $\mathcal{C}$ ist ein Viertelkreisbogen, der vom Punkt $2\mathrm{i}$ zum Punkt -2 läuft. Die Funktion $\log(-(z+1))$ hat den Strahl $]-1,\infty[$ als Schlitz. Der Viertelkreisbogen schneidet diesen Strahl nicht. Damit haben wir eine geeignete Stammfunktion.

Wir haben also

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{1}{z+1}\,\mathrm{d}z = \Big[\log(-(z+1))\Big]_{z=2\mathrm{i}}^{z=-2} = \log(-(-1)) - \log(-(1+2\mathrm{i}))$$

$$= \log 1 - \log(-1-2\mathrm{i}) = -\Big(\ln\sqrt{5} - \mathrm{i}(\pi - \arctan 2)\Big)$$

$$= \ln\frac{1}{\sqrt{5}} + \mathrm{i}(\pi - \arctan 2)$$

$$\left(\quad = \ln\frac{1}{\sqrt{5}} + \mathrm{i}\left(\pi - \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\right) \quad \right)$$

b) Mit

$$z^7 \mathrm{e}^{1/z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{7-2n}}{n!}$$

gilt

$$\int_{|z|=1} z^7 \mathrm{e}^{1/z^2}\,\mathrm{d}z = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{|z|=1} \frac{z^{7-2n}}{n!}\,\mathrm{d}z = \int_{|z|=1} \frac{z^{-1}}{4!}\,\mathrm{d}z = \frac{2\pi\mathrm{i}}{24} = \frac{\pi\mathrm{i}}{12}.$$

6. Aufgabe

10 Punkte

a) Falsch.

α) Die Gleichung ist für $z = 1 + \mathrm{i}$ falsch:

$$\log(-1-\mathrm{i}) = \ln\sqrt{2} - \mathrm{i}\frac{3\pi}{4} \neq \mathrm{i}\pi + \log(1+\mathrm{i}) = \ln\sqrt{2} + \mathrm{i}\frac{3\pi}{4}.$$

β) Die Gleichung ist für $z = 1$ falsch, weil der Ausdruck $\log(-1)$ nicht einmal definiert ist.

b) Wahr.
Wenn eine analytische Funktion $f(z)$ nirgends konform ist, so muss $f'(z) = 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$ gelten. Dann aber ist $f(z)$ eine konstante Funktion.

c) Falsch.
Eine harmonische Funktion nimmt auf einem kompakten Bereich nur auf dem Rand ihr Maximum an. Der Punkt $(0, \frac{\pi}{2})$ liegt aber nicht auf dem Rand der vorliegenden Kreisscheibe mit Radius 2. Damit kann $u(x, y)$ gar nicht dort ein Maximum haben.

d) Wahr.
Es gilt im Kreisring $0 < |z| < \frac{1}{2}$ die Laurent-Entwicklung

$$f(z) = \frac{1}{\frac{1}{z} - 1} = \frac{z}{1-z} = z\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \sum_{n=1}^{\infty} z^n.$$

Die Laurent-Reihe hat keinen Hauptteil, damit ist die Singularität 0 hebbar.

e) Wahr.
Der Zähler ist die Ableitung des Nenners, die Kurve $\mathcal{C}$ ist ein positiv durchlaufener Halbkreis in der linken Halbebene mit sehr großem Radius: Es handelt sich um ein nullstellenzählendes Integral. Das Polynom im hat die Nullstellen -1 und -3, die alle innerhalb $\mathcal{C}$ liegen. Somit gilt ohne jede komplizierte Rechnung

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{2z+4}{z^2+4z+3}\,\mathrm{d}z = 2 \cdot 2\pi\mathrm{i} = 4\pi\mathrm{i}.$$