Technische Universität Berlin

Fakultät II – Institut für Mathematik SS 21

G. Penn-Karras 29. Juli 2021

Juli – Klausur
Analysis III für Ingenieurwissenschaften

Durch die Teilnahme an der Klausur erklären Sie, dass

- Ihnen die für diese Prüfung relevanten Zulassungsvoraussetzungen aus der StuPO bekannt sind. Ihnen ist außerdem bewusst, dass ihre Nichterfüllung zur Ungültigkeit der Prüfung führen kann (§39 Abs. 2 Satz 4 AllgStuPO);
- Ihnen bekannt ist, dass die Teilnahme an der Prüfung eine ordnungsgemäße Anmeldung voraussetzt, andernfalls die Prüfung nicht gültig ist (§39 Abs. 2 AllgStuPO);
- Ihnen bekannt ist, dass eine Prüfung, die unter bekannten und bewusst in Kauf genommenen gesundheitlichen Beeinträchtigungen abgelegt wird, grundsätzlich Gültigkeit hat.

Zur Bearbeitung der Klausuraufgaben sind eigene Aufzeichnungen und Materialien zugelassen. Die Rechenwege sind ausführlich darzustellen. Die Lösungen sind handschriftlich auf DIN-A4-Blättern anzufertigen und anschließend als pdf hochzuladen.

Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**.

Die Klausur ist mit 30 von 60 Punkten bestanden.

---

1. Aufgabe 8 Punkte

Es ist eine Möbius-Transformation T gegeben, die den Punkt 0 auf i und den Punkt ∞ auf $-3\mathrm{i}$ abbildet sowie den Punkt $-\mathrm{i}$ als Fixpunkt besitzt.

a) Bestimmen Sie den Term $T(z)$ der Möbius-Transformation T.

b) Bestimmen Sie das Bild der rechten Halbebene.

2. Aufgabe 8 Punkte

Werten Sie die nachfolgenden Integrale aus.

a) $\displaystyle\int_{\gamma_1} \frac{1}{z-2\mathrm{i}}\,\mathrm{d}z, \qquad \gamma_1 : t \mapsto t,\ -2 \leqslant t \leqslant 0;$

b) $\displaystyle\int_{\gamma_2} \frac{\overline{z}}{(1-\operatorname{Im} z)\operatorname{Re} z}\,\mathrm{d}z, \qquad \gamma_2 :\ t \mapsto (-1-\mathrm{i})t,\ 0 \leqslant t \leqslant 1\,.$

3. Aufgabe 11 Punkte

Werten Sie die nachfolgenden Integrale aus. Sie brauchen nicht ausführlich zu begründen, dass die Voraussetzungen der von Ihnen verwendeten Sätze erfüllt sind

a) $\displaystyle\int\limits_{|z+1|=2} \frac{1+2\sin z}{z\cos z}\,\mathrm{d}z, \qquad$ b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+3}{(x^2+4)(x^2+9)}\,\mathrm{d}x.$

Bitte 2. Blatt mit Aufgaben 4, 5 und 6 beachten!

4. Aufgabe

10 Punkte

Gegeben ist für eine Funktion $u(x, y)$ das Randwertproblem

$$\begin{aligned} \Delta u(x,y) &= 0, && \text{für } y < 0 \text{ und } x^2 + (y + \tfrac{5}{4})^2 > \tfrac{9}{16}, \\ u(x,y) &= 1 && \text{für } x^2 + (y + \tfrac{5}{4})^2 = \tfrac{9}{16}, \\ u(x,y) &= 0 && \text{für } y = 0. \end{aligned}$$

Lösen Sie dieses Randwertproblem mit Hilfe der Methode der harmonischen Verpflanzung, indem Sie als Verpflanzungsabbildung die Möbiustransformation T mit

$$T(z) = \frac{-3z - 3\mathrm{i}}{z - \mathrm{i}}$$

verwenden. Benutzen Sie ohne Nachweis, dass T den Kreis $|z + \frac{5}{4}\mathrm{i}| = \frac{3}{4}$ auf den Kreis $|w| = 1$ abbildet. Als Ansatzfunktionen genügen die Funktionen 1 und $\ln(x^2 + y^2)$.

Hinweis: Es ist hilfreich, zunächst das Bild der reellen Achse unter der Möbius-Transformation T zu bestimmen.

5. Aufgabe

13 Punkte

Ermitteln Sie für das nichtlineare dynamische System (x, y) mit

$$\dot{x} = (x + 1)(y - 2), \qquad \dot{y} = (x + 2)(y^2 - 3y)$$

mit Hilfe des Stabilitätssatzes im nichtlinearen Fall alle Gleichgewichtspunkte zusammen mit dem Stabilitätscharakter (*asymptotisch stabil* – *stabil* – *instabil*) soweit dazu eine Aussage getroffen werden kann.

Bitte zur Aufgabe 6 wenden!

6. Aufgabe

10 Punkte

Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind, und geben Sie dabei jeweils eine Begründung an.
(Jede richtige und vollständig begründete Antwort gibt die jeweils angegebenen Punkte. Antworten ohne Begründung geben keine Punkte.)

Antworten Sie bitte *nur* auf Ihren Lösungsblättern!

a) (2 Punkte) Die Funktion $\exp \overline{z}$ ist für $z = 0$ komplex-differenzierbar.

b) (3 Punkte) Die komplexe Funktion $\dfrac{1}{\cos z - 1}$ hat an der Stelle $z = 0$ einen Pol 2. Ordnung.

c) (2 Punkte) Ist ein lineares reelles Polynom $p(x) = ax + b$ mit $a \neq 0$ und $b > 0$ stabil, so liegt die Nyquistkurve $\nu(t) = p(it)$ für $t > 0$ genau im I. Quadranten.

Hinweis: Anordnung der Quadranten: $\begin{array}{c|c} \mathrm{II} & \mathrm{I} \\ \hline \mathrm{III} & \mathrm{IV} \end{array}$

d) (3 Punkte) Der Gleichgewichtspunkt $(0, 0)$ des linearen dynamischen Systems

$$\dot{\vec{y}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \vec{y}$$

ist stabil.