Musterlösung Klausur Analysis III f. Ing. Version D vom 29. Juli 2021

1. Aufgabe

8 Punkte

a) Die Angaben fassen wir zusammen:

$$T(0) = \mathrm{i}, \quad T(\infty) = -3\mathrm{i}, \quad T(-\mathrm{i}) = -\mathrm{i}.$$

Mit der allgemeinen Form

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

gilt dann

$$b = \mathrm{i}d, \quad a = -3\mathrm{i}c \quad \frac{-\mathrm{i}a+b}{-\mathrm{i}c+d} = -\mathrm{i}.$$

Die Bruchgleichung wird wie folgt umgeformt:

$$\frac{-3c+\mathrm{i}d}{-\mathrm{i}c+d} = -\mathrm{i} \implies -3c+\mathrm{i}d = -c-\mathrm{i}d \implies 2\mathrm{i}d = 2c \implies c = \mathrm{i}d,$$

und für a ergibt sich $a = -3\mathrm{i}c = 3d$.

Somit ist

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{3dz+\mathrm{i}d}{\mathrm{i}dz+d} = \frac{3z+\mathrm{i}}{\mathrm{i}z+1} = \frac{3\mathrm{i}z-1}{-z+\mathrm{i}}$$

die Möbius-Transformation mit den gewünschten Eigenschaften.

b) Die rechte Halbebene liegt rechts der positiv durchlaufenen imaginären Achse $\uparrow$. Auf der imaginären Achse liegen die Punkte $-\mathrm{i}$, 0 und ∞. Die Bildpunkte sind $-\mathrm{i}$, i und $3\mathrm{i}$. Die gerichtete Gerade $\uparrow$ wird auf sich selbst abgebildet. T bildet die rechte Halbebene auf sich ab.

2. Aufgabe

8 Punkte

a) Benutzen einer geeigneten Stammfunktion (Nachweis mit Skizze o.dgl.).

$\log(z-2\mathrm{i})$ hat Schlitz auf der Geraden $\operatorname{Im} z = 2$ in der oberen Halbebene. Die Strecke $[-2,0]$ schneidet den Schlitz nicht. Damit

$$\int_{\gamma_1} \frac{1}{z-2\mathrm{i}}\,\mathrm{d}z = \Big[\log(z-2\mathrm{i})\Big]_{-2}^{0} = \log(-2\mathrm{i}) - \log(-2-2\mathrm{i})$$
$$= \ln 2 + (-\mathrm{i}\tfrac{\pi}{2}) - (\ln(2\sqrt{2}) - \mathrm{i}\tfrac{3\pi}{4}) = -\ln\sqrt{2} + \mathrm{i}\tfrac{\pi}{4}.$$

Es gilt also

$$\int_{\gamma_1} \frac{1}{z-2\mathrm{i}}\,\mathrm{d}z = -\ln\sqrt{2} + \mathrm{i}\tfrac{\pi}{4}.$$

b) Auswertung als Parameterintegral:

$$\int_{\gamma_2} \frac{\overline{z}}{(1-\operatorname{Im} z)\operatorname{Re} z}\,\mathrm{d}z = \int_0^1 \frac{(-1+\mathrm{i})t}{(1+t)(-t)}\cdot(-1-\mathrm{i})\,\mathrm{d}t$$
$$= \int_0^1 \frac{2t}{(1+t)(-t)}\,\mathrm{d}t = -2\int_0^1 \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t = -2\big[\ln|1+t|\big]_0^1 = -2\ln 2.$$

3. Aufgabe

11 Punkte

a) Im Kreis $|z+1| = 2$ befinden sich vom Nenner die Nullstellen 0 und $-\frac{\pi}{2}$ und sind damit isolierte Singularitäten des Integranden.

Wir berechnen die Residuen des Integranden an diesen beiden Singularitäten.

Mit $g(z) = 1 + 2\sin z$ und $h(z) = z\cos z$ gilt

$$\frac{1+2\sin z}{z\cos z} = \frac{g(z)}{h(z)}.$$

Es ist $h'(z) = \cos z - z\sin z$.

Es gilt $g(0) = 1 \neq 0$ und $h'(0) = 1 \neq 0$ sowie
$g(-\frac{\pi}{2}) = -1 \neq 0$ und $h'(-\frac{\pi}{2}) = -\frac{\pi}{2} \neq 0$.

Somit ist

$$\operatorname{Res}\left(\frac{1+2\sin z}{z\cos z}, 0\right) = \frac{g(0)}{h'(0)} = \frac{1}{1} = 1, \qquad \operatorname{Res}\left(\frac{1+2\sin z}{z\cos z}, -\frac{\pi}{2}\right) = \frac{g(-\frac{\pi}{2})}{h'(\frac{\pi}{2})} = \frac{-1}{-\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}.$$

Der Residuensatz ergibt dann die Aussage

$$\int\limits_{|z+1|=2} \frac{1+2\sin z}{z\cos z}\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\left(\operatorname{Res}\left(\frac{1+2\sin z}{z\cos z}, 0\right) + \operatorname{Res}\left(\frac{1+2\sin z}{z\cos z}, -\frac{\pi}{2}\right)\right)$$
$$= 2\pi\mathrm{i}\left(1 + \frac{2}{\pi}\right) = \mathrm{i}(2\pi + 4) = 2\mathrm{i}(2+\pi).$$

b) Die Nullstellen des Nenners sind $\pm 2\mathrm{i}$ und $\pm 3\mathrm{i}$ und allesamt einfach. Es werden nur die Nullstellen in der oberen Halbebene berücksichtigt: $2\mathrm{i}$ und $3\mathrm{i}$. Es ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+3}{(x^2+4)(x^2+9)}\,\mathrm{d}x = 2\pi\mathrm{i}\left[\left(\frac{\frac{x^2+3}{x^2+9}}{2x}\right)_{|x=2\mathrm{i}} + \left(\frac{\frac{x^2+3}{x^2+4}}{2x}\right)_{|x=3\mathrm{i}}\right]$$
$$= 2\pi\mathrm{i}\left[\frac{\frac{-1}{5}}{4\mathrm{i}} + \frac{\frac{-6}{-5}}{6\mathrm{i}}\right]$$
$$= 2\pi\mathrm{i}\cdot(-\mathrm{i})\left(-\frac{1}{20} + \frac{1}{5}\right) = 2\pi\cdot\frac{3}{20} = \frac{3}{10}\pi.$$

4. Aufgabe

10 Punkte

Man benötigt noch das Bild der reellen Achse. Mit

$$0, 1, \infty \quad \xrightarrow{T} \quad 3, -3\mathrm{i}, -3$$

ist das Bild der Kreis $|z| = 3$.

Das Gebiet, auf dem u definiert ist, wird vom Kreis $|z + \frac{5}{4}\mathrm{i}| = \frac{3}{4}$ und der reellen Achse berandet. Also wird das Bildgebiet von den Kreisen $|w| = 1$ und $|w| = 3$ berandet. Das Bildgebiet ist somit der Kreisring $1 < |w| < 3$.

Für die Funktion U mit $U = u \circ T^{-1}$ ist gegeben das RWP

$$\begin{aligned} \Delta U(x, y) &= 0, \qquad && \text{für } 1 < x^2 + y^2 < 9 \\ U(x, y) &= 1 && \text{für } x^2 + y^2 = 1, \\ U(x, y) &= 0 && \text{für } x^2 + y^2 = 9. \end{aligned}$$

Das wird gelöst durch

$$U(x, y) = 1 - \frac{1}{\ln 9} \ln(x^2 + y^2).$$

Mit $u = U \circ T$ ist die Funktion u dann durch

$$u(x, y) = 1 - \frac{1}{\ln 9} \ln |T(x, y)|^2 = 1 - \frac{1}{\ln 9} \ln \frac{9x^2 + 9(y + 1)^2}{x^2 + (y - 1)^2}$$

gegeben.

5. Aufgabe

13 Punkte

Ermitteln der GGP:

$(x+1)(y-2) = 0, \qquad (x+2)(y^2-3y) = 0 \implies (x, y) \in \{(-1, 0), (-1, 3), (-2, 2)\}.$

Jacobi-Matrix:

$$\mathcal{J}(x, y) = \begin{pmatrix} y-2 & x+1 \\ y^2-3y & (x+2)(2y-3) \end{pmatrix}$$

Dann ist

$$J(-1, 0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}, \qquad J(-1, 3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad J(-2, 2) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Alle Eigenwerte von $J(-1, 0)$ haben negativen Realteil: Der GGP $(-1, 0)$ ist asymptotisch stabil.

Alle Eigenwerte von $J(-1, 3)$ haben positiven Realteil: Der GGP $(-1, 3)$ ist instabil.

Das charakteristische Polynom $J(-2, 2)$ ist $\lambda^2 - 2$, die Eigenwerte damit $\pm\sqrt{2}$. Ein Eigenwert hat positiven Realteil. Der GGP $(-2, 2)$ ist instabil.

6. Aufgabe 10 Punkte

a) (2 Punkte) Falsch.
Mit $z = x + \mathrm{i}y$, $x, y \in \mathbb{R}$, gilt

$$\exp \overline{z} = \exp x \exp(-\mathrm{i}y) = \mathrm{e}^x \cos y - \mathrm{i}\mathrm{e}^x siny.$$

Mit $u(x,y) = \mathrm{e}^x \cos y$ und $v(x,y) = -\mathrm{e}^x \sin y$ ist $u_x(x,y) = \mathrm{e}^x \cos y$ sowie $v_y(x,y) = -\mathrm{e}^x \cos y$. Für $(x,y) = (0,0)$ gilt $u_x(0,0) = 1$ und $v_y(0,0) = -1$. Die C-R-DGL $u_x = v_y$ ist an der Stelle $(0,0)$ nicht erfüllt, damit ist $\exp \overline{z}$ an der Stelle 0 nicht komplex differenzierbar.

b) (3 Punkte) Wahr.

α) Es ist

$$\frac{1}{\cos z - 1} = \frac{1}{-1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k}} = \frac{1}{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k}} = \frac{g(z)}{z^2}$$

mit

$$g(z) = \frac{1}{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k-2}}.$$

Es ist $g(0) = 1$. Damit ist die Stelle 0 eine Polstelle 2. Ordnung.

β) Kurz: Es kann begründet werden, dass der Nenner eine Nullstelle 2. Ordnung hat (Funktion und 1. Ableitung 0, zweite Ableitung ungleich 0).

γ) Kurz: Es kann nachgerechnet werden, dass $\lim_{z\to 0} z^2 f(z)$ existiert und ungleich 0 ist.

c) (2 Punkte) Wahr.

α) Die einzige Nullstelle von p ist $-\frac{b}{a}$. Weil p stabil ist, ist diese Nullstelle negativ und gilt $a > 0$.

Es ist $\nu(t) = p(\mathrm{i}t) = b + \mathrm{i}at$, somit $\operatorname{Re} \nu(t) = b > 0$ und mit $t > 0$ nun $\operatorname{Im} \nu(t) = at > 0$: Die Nyquistkurve liegt also im I. Quadranten.

β) Laut Nyquistkriterium muss die Nyquistkurve für $t > 0$ genau einen Quadranten positiv durchlaufen. Da $\nu(0) = b$ auf der positiven reellen Achse liegt, muss die Kurve im I. Quadranten liegen.

d) (3 Punkte) Falsch.
Das charakteristische Polynom ist λ^2, damit ist 0 ein doppelter Eigenwert.

Die Bestimmungsgleichung für den Eigenraum

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

hat nur die Lösung

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Der doppelte Eigenwert 0 hat geometrische Vielfachheit 1. Damit ist der GGP $(0, 0)$ nach dem Stabilitätssatz für den linearen Fall nicht stabil, sondern instabil.