

Juli – Klausur Analysis III für Ingenieurwissenschaften

Name: Vorname:

Matr.-Nr.: Studiengang:

Hiermit erkläre ich, dass ich mich prüfungsfähig fühle. Mir ist bekannt, dass eine Prüfung, die unter bekannten und bewusst in Kauf genommenen gesundheitlichen Beeinträchtigungen abgelegt wird, grundsätzlich Gültigkeit hat (§ 64 Abs. 1 Satz AllgStuPO).

Hiermit erkläre ich, dass mir die für diese Prüfung relevanten Zulassungsvoraussetzungen aus der StuPO bekannt sind. Mir ist außerdem bewusst, dass ihre Nichterfüllung zur Ungültigkeit der Prüfung führen kann (§ 63 Abs. 2 AllgStuPO).

Hiermit erkläre ich, dass mir bekannt ist, dass die Teilnahme an der Prüfung eine ordnungsgemäße Anmeldung voraussetzt, andernfalls die Prüfung nicht gültig ist (§ 63 Abs. 1 AllgStuPO).

Es ist nur ein doppelseitig handbeschriebenes DIN A4-Blatt mit Notizen zugelassen. Taschenrechner und Formelsammlungen sind nicht zugelassen.

Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4-Blättern abzugeben. Mit Bleistift und in Rot geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Geben Sie immer den **vollständigen Rechenweg** oder eine **vollständige Begründung** an. Alle Lösungen müssen auf den Lösungsblättern stehen. Lösungen auf dem Deckblatt werden nicht bewertet.

Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**.

Die Klausur ist mit 30 von 60 Punkten bestanden.

Korrektur

1	2	3	4	5	6	Σ

1. Aufgabe

7 Punkte

Ermitteln Sie für das autonome DGL-System

$$\dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} \vec{x}$$

das Stabilitätsverhalten (*asymptotisch stabil*, *stabil*, *instabil*) des Gleichgewichtspunkts $(0, 0)$.

2. Aufgabe

10 Punkte

In der komplexen Ebene sei die Kurve $\mathcal{C}$ gegeben mit

$$\mathcal{C} : t \mapsto 1 + it, \quad -1 \leq t \leq 1.$$

Berechnen Sie die folgenden zwei Integrale:

$$\text{a) } \int_{\mathcal{C}} \frac{1 + \operatorname{Im} z}{1 + \operatorname{Re} z}, \quad \text{b) } \int_{\mathcal{C}} \frac{1}{z - 2}.$$

3. Aufgabe

15 Punkte

Werten Sie die nachfolgenden Integrale aus. Sie brauchen nicht ausführlich zu begründen, dass die Voraussetzungen der von Ihnen verwendeten Sätze erfüllt sind.

$$\text{a) (6 Punkte) } \int_{|z|=1} \frac{z+1}{e^z - 1} dz, \quad \text{b) (9 Punkte) } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2 + 1)(x^2 + 2x + 2)} dx.$$

4. Aufgabe

9 Punkte

Gegeben ist für eine Funktion $u(x, y)$ das Randwertproblem auf einem Winkelgebiet im $\mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} \Delta u(x, y) &= 0, & \text{für } 0 < x < y, \\ u(x, x) &= 6x^2 & \text{für } x > 0, \\ u(0, y) &= -y^2 & \text{für } y > 0. \end{aligned}$$

Lösen Sie dieses Randwertproblem mit Hilfe der Methode der harmonischen Verpflanzung, indem Sie als Verpflanzungsabbildung die Funktion $f(z) = z^2$ verwenden.

Hinweis: Als Ansatzfunktionen benutzen Sie die harmonischen Funktionen x und y .

Bitte zu den Aufgaben 5 und 6 wenden!

5. Aufgabe

9 Punkte

Auf $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ ist eine Möbius-Transformation T gegeben mit den Eigenschaften

$$T(0) = i, \quad T(\infty) = 1, \quad T(i) = \infty.$$

- a) Bestimmen Sie komplexe Zahlen a, b, c, d , so dass gilt

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}.$$

- b) Skizzieren Sie das Bild der offenen linken Halbebene $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z < 0\}$ und begründen Sie Ihre Entscheidung.

6. Aufgabe

10 Punkte

Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind, und geben Sie dabei jeweils eine Begründung an.

(Jede richtige und vollständig begründete Antwort gibt die jeweils angegebenen Punkte. Antworten ohne Begründung geben keine Punkte.)

Antworten Sie bitte *nur* auf Ihren Lösungsblättern!

- a) (2 Punkte) Die komplexe Funktion $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto \bar{z}$ ist auf der reellen Achse ($\operatorname{Im} z = 0$) komplex-differenzierbar.
- b) (3 Punkte) Die Funktion $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto xy$ nimmt auf der abgeschlossenen Kreisscheibe $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ ihr Maximum im Punkt $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ an.
- c) (2 Punkte) Die komplexe Funktion $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$f(z) = \frac{\sin z}{z^2}$$

hat für $z = 0$ einen Pol 1. Ordnung.

- d) (3 Punkte) Das Polynom $x^3 + 2x^2 + 3x + 2$ ist stabil.