

Juli – Klausur Analysis III für Ingenieurwissenschaften

Name: Vorname:

Matr.-Nr.: Studiengang:

Hiermit erkläre ich, dass ich mich prüfungsfähig fühle. Mir ist bekannt, dass eine Prüfung, die unter bekannten und bewusst in Kauf genommenen gesundheitlichen Beeinträchtigungen abgelegt wird, grundsätzlich Gültigkeit hat (§ 64 Abs. 1 Satz AllgStuPO).

Hiermit erkläre ich, dass mir die für diese Prüfung relevanten Zulassungsvoraussetzungen aus der StuPO bekannt sind. Mir ist außerdem bewusst, dass ihre Nichterfüllung zur Ungültigkeit der Prüfung führen kann (§ 63 Abs. 2 AllgStuPO).

Hiermit erkläre ich, dass mir bekannt ist, dass die Teilnahme an der Prüfung eine ordnungsgemäße Anmeldung voraussetzt, andernfalls die Prüfung nicht gültig ist (§ 63 Abs. 1 AllgStuPO).

Es ist nur ein doppelseitig handbeschriebenes DIN A4-Blatt mit Notizen zugelassen. Taschenrechner und Formelsammlungen sind nicht zugelassen.

Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4-Blättern abzugeben. Mit Bleistift und in Rot geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**.

Die Klausur ist mit 30 von 60 Punkten bestanden.

Korrektur

1	2	3	4	5	6	Σ

1. Aufgabe

9 Punkte

Gegeben sei die Funktion $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto z|z|^2$.

Ermitteln Sie alle Stellen, an denen f komplex-differenzierbar ist.

2. Aufgabe

11 Punkte

Werten Sie die nachfolgenden Integrale aus:

$$\text{a) } \int_C \frac{1}{z-1} dz, \quad C: t \mapsto t + 2it, \quad -1 \leq t \leq 1;$$

$$\text{b) } \int_{|z|=2} \frac{e^{i\pi z}}{(z-1)(z+3)} dz.$$

3. Aufgabe

13 Punkte

Werten Sie die nachfolgenden Integrale aus. Sie brauchen nicht ausführlich zu begründen, dass die Voraussetzungen der von Ihnen verwendeten Sätze erfüllt sind.

$$\text{a) (9 Punkte) } \int_{|z|=\frac{3}{2}} \frac{1}{(e^{i\pi z} - 1)(z-1)} dz, \quad \text{b) (4 Punkte) } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + 2x + 10} dx.$$

4. Aufgabe

9 Punkte

Gegeben ist für eine Funktion $u(x, y)$ das Randwertproblem im $\mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} \Delta u(x, y) &= 0, & \text{für } -x < y < 0, \\ u(x, 0) &= -x^2 & \text{für } x > 0, \\ u(x, -x) &= 2x^2 & \text{für } x > 0. \end{aligned}$$

Lösen Sie dieses Randwertproblem mit Hilfe der Methode der harmonischen Verpflanzung, indem Sie als Verpflanzungsabbildung die Funktion $f(z) = iz^2$ verwenden.

Hinweis: Als Ansatzfunktionen benutzen Sie die harmonischen Funktionen x und y .

Bitte 2. Blatt mit Aufgaben 5 und 6 beachten!

5. Aufgabe

10 Punkte

Mit K bezeichnen wir den positiv durchlaufenen Kreis mit Mittelpunkt $\frac{1}{2}$ und Radius $\frac{1}{2}$. Für $z \in K$ gilt also $|z - \frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$.

Es gibt genau eine Möbius-Transformation T mit folgenden Eigenschaften:

- T bildet die von links nach rechts durchlaufene reelle Achse $\rightarrow$ auf die von oben nach unten durchlaufende imaginäre Achse $\downarrow$ und den (positiv durchlaufenen) Kreis K auf die von rechts nach links durchlaufene reelle Achse $\leftarrow$ ab:

$$T(\rightarrow) = \downarrow, \quad T(K) = \leftarrow .$$

- Es gilt: $T(\frac{1}{2}) = -2i$.

Bearbeiten Sie die folgenden Aufgaben:

- a) Bestimmen Sie die Möbius-Transformation T .
- b) Bestimmen Sie das Bild $T(\downarrow)$. (Eine Skizze ist hilfreich.)

6. Aufgabe

8 Punkte

Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind, und geben Sie dabei jeweils eine Begründung an.

(Jede richtige und vollständig begründete Antwort gibt die jeweils angegebenen Punkte. Antworten ohne Begründung geben keine Punkte.)

Antworten Sie bitte *nur* auf Ihren Lösungsblättern!

- a) (2 Punkte) Es gilt

$$\int_{|z+1|=1} \frac{z^2}{z-1} dz = -1.$$

- b) (3 Punkte) Es gilt

$$\int_{|z|=1} e^{\frac{1}{z}} dz = 2\pi i.$$

- c) (3 Punkte) Das Polynom $x^3 + 4x^2 + 7x + 4$ ist stabil.