

Oktober – Klausur Analysis III für Ingenieurwissenschaften

Name: Vorname:

Matr.-Nr.: Studiengang:

Hiermit erkläre ich, dass ich mich prüfungsfähig fühle. Mir ist bekannt, dass eine Prüfung, die unter bekannten und bewusst in Kauf genommenen gesundheitlichen Beeinträchtigungen abgelegt wird, grundsätzlich Gültigkeit hat (§ 64 Abs. 1 Satz AllgStuPO).

Hiermit erkläre ich, dass mir die für diese Prüfung relevanten Zulassungsvoraussetzungen aus der StuPO bekannt sind. Mir ist außerdem bewusst, dass ihre Nichterfüllung zur Ungültigkeit der Prüfung führen kann (§ 63 Abs. 2 AllgStuPO).

Hiermit erkläre ich, dass mir bekannt ist, dass die Teilnahme an der Prüfung eine ordnungsgemäße Anmeldung voraussetzt, andernfalls die Prüfung nicht gültig ist (§ 63 Abs. 1 AllgStuPO).

Es ist nur ein doppelseitig handbeschriebenes DIN A4-Blatt mit Notizen zugelassen. Taschenrechner und Formelsammlungen sind nicht zugelassen.

Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4-Blättern abzugeben. Mit Bleistift und in Rot geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Geben Sie immer den **vollständigen Rechenweg** oder eine **vollständige Begründung** an.

Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**.

Die Klausur ist mit 30 von 60 Punkten bestanden.

Korrektur

1	2	3	4	5	6	Σ

1. Aufgabe

10 Punkte

Bestimmen Sie für das dynamische System

$$\begin{aligned} -(x-3)(y-1) &= \dot{x} \\ (x-4)(y-2) &= \dot{y} \end{aligned}$$

die Gleichgewichtspunkte zusammen mit ihrem Stabilitätscharakter (*asymptotisch stabil*, *stabil*, *instabil*).

Hinweis: Beachten Sie das Minuszeichen in der Gleichung für $\dot{x}$.

2. Aufgabe

10 Punkte

Gegeben ist die Kurve

$$C : t \mapsto e^{it}, \quad 0 \leq t \leq \pi.$$

Die Kurve C stellt einen Halbkreis in der oberen komplexen Halbebene dar.

Werten Sie die nachfolgenden Integrale aus:

$$\text{a) } \int_C \frac{\operatorname{Im} z}{z} dz, \quad \text{b) } \int_C \frac{1}{z-2} dz.$$

3. Aufgabe

13 Punkte

Werten Sie die nachfolgenden Integrale aus. Sie brauchen nicht ausführlich zu begründen, dass die Voraussetzungen der von Ihnen verwendeten Sätze erfüllt sind.

$$\text{a) (9 Punkte) } \int_{|z|=2} \frac{1}{(z - \frac{\pi}{2})^2 \sin z} dz, \quad \text{b) (4 Punkte) } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+4)(x^2+9)} dx.$$

4. Aufgabe

10 Punkte

Gegeben ist für eine Funktion $u(x, y)$ das Randwertproblem im $\mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} \Delta u(x, y) &= 0 && \text{für } 0 < y < x, \\ u(x, 0) &= x^4 && \text{für } x > 0, \\ u(x, x) &= -4x^4 + 6x^2 && \text{für } x > 0. \end{aligned}$$

Lösen Sie dieses Randwertproblem mit Hilfe der Methode der harmonischen Verpflanzung, indem Sie als Verpflanzungsabbildung die Funktion $f(z) = z^2$ verwenden.

Hinweis: Als Ansatzfunktionen benutzen Sie die harmonischen Funktionen x , y und $x^2 - y^2$.

Bitte 2. Blatt mit Aufgaben 5 und 6 beachten!

5. Aufgabe

10 Punkte

Es gibt genau eine Möbius-Transformation T mit folgenden Eigenschaften:

$$T(0) = 0, \quad T(\infty) = 2i, \quad T(1) = \infty.$$

- a) Bestimmen Sie die Möbius-Transformation T .
- b) Ermitteln Sie für die von links nach rechts durchlaufene reelle Achse $\rightarrow$ das Bild $T(\rightarrow)$.
- c) Mit $\nearrow$ werde die gerichtete Gerade bezeichnet, die durch 0 und $1 + i$ in dieser Reihenfolge läuft.

Zeigen Sie, dass $\nearrow$ von T auf einen Kreis K mit endlichem Radius abgebildet wird. Geben Sie Mittelpunkt und Radius von K an, hierzu reicht eine aussagekräftige Skizze aus.

6. Aufgabe

7 Punkte

Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind, und geben Sie dabei jeweils eine Begründung an.

(Jede richtige und vollständig begründete Antwort gibt die jeweils angegebenen Punkte. Antworten ohne Begründung geben keine Punkte.)

Antworten Sie bitte *nur* auf Ihren Lösungsblättern!

- a) (2 Punkte) Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x^3 - 3xy^2$ nimmt auf der abgeschlossenen Kreisscheibe $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$ ihr Minimum im Punkt $(0, 0)$ an.
- b) (2 Punkte) Es gilt

$$\int_{|z|=1} z e^{z^2} dz = 0.$$

- c) (3 Punkte) Das Polynom $x^3 + 2x^2 + 2x + 5$ ist stabil.