

Lösung zur Klausur Analysis III f. Ing. vom 27. Juli 2024

1. Aufgabe

7 Punkte

Ermitteln Sie für das autonome DGL-System

$$\dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} \vec{x}$$

das Stabilitätsverhalten (*asymptotisch stabil*, *stabil*, *instabil*) des Gleichgewichtspunkts $(0, 0)$.

Lösung:

Hier liegt ein lineares dynamisches System vor, damit kann der Stabilitätssatz für den linearen Fall angewendet werden.

Es genügt die Untersuchung der Eigenwerte der Systemmatrix. Charakteristisches Polynom:

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 2 - \lambda & -2 \\ 5 & -4 - \lambda \end{pmatrix} &= (2 - \lambda)(-4 - \lambda) + 10 \\ &= \lambda^2 + 2\lambda - 8 + 10 = \lambda^2 + 2\lambda + 2 \quad (= (\lambda + 1)^2 + 1). \end{aligned}$$

Die Eigenwerte der Systemmatrix sind $-1 + i$ und $-1 - i$.

Sie haben negativen Realteil.

Damit ist der Gleichgewichtspunkt $(0, 0)$ asymptotisch stabil.

2. Aufgabe

10 Punkte

In der komplexen Ebene sei die Kurve $\mathcal{C}$ gegeben mit

$$\mathcal{C} : t \mapsto 1 + it, \quad -1 \leq t \leq 1.$$

Berechnen Sie die folgenden zwei Integrale:

$$\text{a) } \int_{\mathcal{C}} \frac{1 + \operatorname{Im} z}{1 + \operatorname{Re} z} dz, \quad \text{b) } \int_{\mathcal{C}} \frac{1}{z - 2} dz.$$

Lösung:

a) Berechnung als Parameterintegral:

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{1 + \operatorname{Im} z}{1 + \operatorname{Re} z} dz = \int_{-1}^1 \frac{1 + t}{1 + 1} \cdot i dt = \frac{i}{2} \int_{-1}^1 (1 + t) dt = \frac{i}{2} \cdot 2 = i.$$

b) Eine Stammfunktion von $\frac{1}{z-2}$ ist $\log(-(z-2))$. Der Definitionsbereich dieser Stammfunktion ist die Menge $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 2 \text{ oder } \operatorname{Im} z \neq 0\}$. Die Kurve $\mathcal{C}$ liegt in diesem Definitionsbereich. (Skizze für alles das genügt.)

Die Kurve $\mathcal{C}$ verläuft von $1 - i$ nach $1 + i$.

Damit ist

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} \frac{1}{z-2} dz &= [\log(-(z-2))]_{z=1-i}^{z=1+i} \\ &= \log(-(-1+i)) - \log(-(-1-i)) = \log(1-i) - \log(1+i) \\ &= (\ln \sqrt{2} - i\frac{\pi}{4}) - (\ln \sqrt{2} + i\frac{\pi}{4}) = -i\frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Es gilt also

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{1}{z-2} dz = -i\frac{\pi}{2}.$$

3. Aufgabe

15 Punkte

Werten Sie die nachfolgenden Integrale aus. Sie brauchen nicht ausführlich zu begründen, dass die Voraussetzungen der von Ihnen verwendeten Sätze erfüllt sind.

$$\text{a) (6 Punkte) } \int_{|z|=1} \frac{z+1}{e^z-1} dz, \quad \text{b) (9 Punkte) } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)(x^2+2x+2)} dx.$$

Lösung:

- a) Die Nullstellen des Nenners $e^z - 1$ sind die Stellen $k \cdot 2\pi i$ mit $k \in \mathbb{Z}$. Für $k \neq 0$ liegen die Nullstellen $k \cdot 2\pi i$ außerhalb des Einheitskreises $|z| = 1$. Nur die isolierte Singularität 0 liegt innerhalb dieses Einheitskreises.

Nach dem Residuensatz gilt also

$$\int_{|z|=1} \frac{z+1}{e^z-1} dz = 2\pi i \operatorname{Res} \left(\frac{z+1}{(e^z-1)}, 0 \right).$$

Mit $g(z) = z+1$ und $h(z) = e^z - 1$ hat man

$$\frac{z+1}{e^z-1} = \frac{g(z)}{h(z)}.$$

Wegen $h(0) = 0$, $h'(0) = e^0 = 1 \neq 0$ und $g(0) = 1 \neq 0$ ist 0 eine Polstelle 1. Ordnung. Berechnung des Residuums an dieser Polstelle:

$$\operatorname{Res} \left(\frac{z+1}{(e^z-1)}, 0 \right) = \frac{g(0)}{h'(0)} = \frac{1}{1} = 1.$$

Somit ist

$$\int_{|z|=1} \frac{z+1}{e^z-1} dz = 2\pi i \cdot 1 = 2\pi i.$$

- b) Die Nullstellen des Nenners sind $\pm i$ und $-1 \pm i$.

Es gilt dann

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)(x^2+2x+2)} dx \\ &= 2\pi i \left(\left(\frac{1}{(2z)(z^2+2z+2) + (z^2+1)(2z+2)} \right)_{|z=i} \right. \\ & \quad \left. + \left(\frac{1}{(2z)(z^2+2z+2) + (z^2+1)(2z+2)} \right)_{|z=-1+i} \right). \end{aligned}$$

Es ist

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{(2z)(z^2 + 2z + 2) + (z^2 + 1)(2z + 2)} \right)_{|z=i} \\ &= \frac{1}{2i \cdot (1 + 2i) + 0} = \frac{1}{-4 + 2i} = \frac{-4 - 2i}{20} = \frac{-2 - i}{10} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{(2z)(z^2 + 2z + 2) + (z^2 + 1)(2z + 2)} \right)_{|z=-1+i} \\ &= \frac{1}{0 + (-2i + 1)(2i)} = \frac{1}{4 + 2i} = \frac{4 - 2i}{20} = \frac{2 - i}{10}. \end{aligned}$$

Somit

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2 + 1)(x^2 + 2x + 2)} dx = 2\pi i \left(\frac{-2 - i}{10} + \frac{2 - i}{10} \right) = 2\pi i \cdot \frac{-2i}{10} = \frac{2\pi}{5}.$$

4. Aufgabe

9 Punkte

Gegeben ist für eine Funktion $u(x, y)$ das Randwertproblem auf einem Winkelgebiet im $\mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned}\Delta u(x, y) &= 0, & \text{für } 0 < x < y, \\ u(x, x) &= 6x^2 & \text{für } x > 0, \\ u(0, y) &= -y^2 & \text{für } y > 0.\end{aligned}$$

Lösen Sie dieses Randwertproblem mit Hilfe der Methode der harmonischen Verpflanzung, indem Sie als Verpflanzungsabbildung die Funktion $f(z) = z^2$ verwenden.

Hinweis: Als Ansatzfunktionen benutzen Sie die harmonischen Funktionen x und y .

Lösung:

Es ist

$$z^2 = (x^2 - y^2) + i \cdot 2xy.$$

Die Verpflanzungsabbildung als $\mathbb{R}^2$ -Funktion betrachtet:

$$(x, y) \mapsto (x^2 - y^2, 2xy) = (x', y').$$

Für die verpflanzte Funktion U mit $u = U \circ f$ werden die Randverläufe bestimmt:

$$u(x, x) = 6x^2 = U(0, 2x^2) \implies U(0, y') = 3y'.$$

und

$$u(0, y) = -y^2 = U(-y^2, 0) \implies U(x', 0) = x'.$$

Offenbar besitzt die harmonische Funktion U mit

$$U(x', y') = x' + 3y'$$

die gewünschten Randverläufe. Es ist damit

$$u(x, y) = U(x', y') = x' + 3y' = (x^2 - y^2) + 3 \cdot 2xy = x^2 - y^2 + 6xy$$

eine Lösung des vorgelegten Randwertsproblems.

5. Aufgabe

9 Punkte

Auf $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ ist eine Möbius-Transformation T gegeben mit den Eigenschaften

$$T(0) = i, \quad T(\infty) = 1, \quad T(i) = \infty.$$

- a) Bestimmen Sie komplexe Zahlen a, b, c, d , so dass gilt

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}.$$

- b) Skizzieren Sie das Bild der offenen linken Halbebene $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z < 0\}$ und begründen Sie Ihre Entscheidung.

Lösung:

- a) Aus $T(0) = i$ findet man $b = id$. Aus $T(\infty) = 1$ findet man $c = a$. Aus $T(i) = \infty$ folgt $ic + d = 0$, also $d = -ic$.

Mit jeder Wahl von a außer $a = 0$ findet man $c = a$, $d = -ia$ und $b = i \cdot (-ia) = a$. Somit gilt

$$T(z) = \frac{az + a}{az - ai} = \frac{z + 1}{z - i}.$$

- b) Die offene linke Halbebene liegt links zur von unten nach oben durchlaufenen imaginären Achse („ $\uparrow$ “).

Die Punkte $i, \infty, 0$ werden nacheinander auf $\infty, 1, i$ abgebildet.

Die von unten nach oben durchlaufene imaginäre Achse wird also auf die Gerade durch 1 und i abgebildet, die von unten rechts nach links oben durchlaufen wird („ $\nwarrow$ “).

Die offene linke Halbebene wird auf die Halbebene abgebildet, die unterhalb der durch die Punkte 1 und i gehenden Geraden liegt.

6. Aufgabe

10 Punkte

Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind, und geben Sie dabei jeweils eine Begründung an.

(Jede richtige und vollständig begründete Antwort gibt die jeweils angegebenen Punkte. Antworten ohne Begründung geben keine Punkte.)

Antworten Sie bitte *nur* auf Ihren Lösungsblättern!

- a) (2 Punkte) Die komplexe Funktion $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto \bar{z}$ ist auf der reellen Achse ($\operatorname{Im} z = 0$) komplex-differenzierbar.

Antwort: Falsch.

Es ist für $x, y \in \mathbb{R}$

$$f(x + iy) = x - iy,$$

also $u(x, y) = x$ und $v(x, y) = -y$. Die Cauchy-Riemann-Differentialgleichung $u_x = v_y$ wird hier zu $1 = -1$. Diese Gleichung ist für keinen Punkt $(x, 0)$ der reellen Achse erfüllbar. Damit ist f auf der reellen Achse nicht komplex-differenzierbar.

f ist sogar nirgends auf $\mathbb{C}$ komplex differenzierbar.

- b) (3 Punkte) Die Funktion $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto xy$ nimmt auf der abgeschlossenen Kreisscheibe $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ ihr Maximum im Punkt $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ an.

Antwort: Falsch.

Die Funktion u ist harmonisch. Damit nimmt sie ihr Maximum nur auf dem Rand der beschriebenen Kreisscheibe an.

Der Punkt $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ liegt nicht auf dem Rand. Folglich nimmt u ihr Maximum jedenfalls nicht im Punkt $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ an.

c) (2 Punkte) Die komplexe Funktion $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$f(z) = \frac{\sin z}{z^2}$$

hat für $z = 0$ einen Pol 1. Ordnung.

Antwort: Wahr.

α) Mit der Sinus-Reihe ergibt sich

$$\frac{\sin z}{z^2} = z^{-2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n-1} = z^{-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n-1}.$$

Der Hauptteil bricht bei der Potenz z^{-1} ab. Damit handelt es sich um einen Pol 1. Ordnung.

β) Ein etwas indirekter Test auf „1. Ordnung“ ist die Berechnung des Residuums mit einem Grenzwert. Wenn der Grenzwert

$$\lim_{z \rightarrow z_0} ((z - z_0)f(z))$$

existiert, dann hat f bei z_0 einen Pol 1. Ordnung oder eine hebbare Singularität. Hier ist

$$\lim_{z \rightarrow 0} z \cdot \frac{\sin z}{z^2} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} \stackrel{rH}{=} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\cos z}{1} = 1.$$

Bei einer hebbaren Singularität müsste dieser Grenzwert gleich 0 sein, was nicht der Fall ist. Damit handelt es sich um einen Pol 1. Ordnung.

d) (3 Punkte) Das Polynom $x^3 + 2x^2 + 3x + 2$ ist stabil.

Antwort: Wahr

α) Routh-Schema: $n = 3$, also höchstens 4 Zeilen:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \\ 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

(vgl. Skript S. 85, Beispiel 93)

Die vierte Zeile ist von der finalen Form $(a_0^n \ 0)$. Damit ist das gestellte Polynom stabil.

β) Die Koeffizienten des vorliegenden Polynoms sind sämtlich positiv.

Routh-Hurwitz-Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Bei kubischen Polynomen braucht nur die „mittlere“ Abschnittsdeterminante in Augenschein genommen zu werden:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 4$$

Diese Determinante ist positiv.

Damit ist das vorliegende Polynom stabil.

γ) Raten oder scharfes Hinsehen ergibt, dass das Polynom $x^3 + 2x^2 + 3x + 2$ die Nullstelle -1 hat (rechnerischer Nachweis erforderlich). Diese Nullstelle hat negativen Realteil.

Polynomdivision oder Horner-Schema ergibt

$$x^3 + 2x^2 + 3x + 2 = (x + 1)(x^2 + x + 2)$$

Das quadratische Polynom $x^2 + x + 2$ hat positive Koeffizienten, damit ist es stabil (was in einem Tutorium bewiesen wurde), d.h. seine Nullstellen haben negativen Realteil.

Die Nullstellen von $x^2 + x + 2$ sind $-\frac{1}{2} \pm i\frac{1}{2}\sqrt{7}$.

Alle Nullstellen des Polynoms $x^3 + 2x^2 + 3x + 2$ haben negativen Realteil. Damit ist es stabil.