

Lösung zur Klausur 26. Juli 2023

1. Aufgabe

9 Punkte

Gegeben sei die Funktion $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto z|z|^2$.

Ermitteln Sie alle Stellen, an denen f komplex-differenzierbar ist.

Lösung:

Mit $|z|^2 = x^2 + y^2$ ist

$$f(x + iy) = x(x^2 + y^2) + iy(x^2 + y^2),$$

also

$$u(x, y) = x^3 + xy^2, \quad v(x, y) = x^2y + y^3.$$

Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen (C-R-DGL)

$$\begin{aligned} u_x = v_y &\iff 3x^2 + y^2 = x^2 + 3y^2 \iff x^2 = y^2 \iff |x| = |y|, \\ u_y = -v_x &\iff 2xy = -2xy \iff xy = 0 \end{aligned}$$

Die C-R-DGL werden nur für $(x, y) = (0, 0)$ erfüllt.

Die Funktion f ist allenfalls im Punkt $z = 0$ komplex-differenzierbar.

Die vier Ableitungen u_x , u_y , v_x und v_y sind Polynome in x und y und somit stetig.

Folglich ist f genau im Punkt 0 komplex-differenzierbar.

2. Aufgabe

11 Punkte

Werten Sie die nachfolgenden Integrale aus:

$$\text{a) } \int_C \frac{1}{z-1} dz, \quad C : t \mapsto t + 2it, \quad -1 \leq t \leq 1;$$

$$\text{b) } \int_{|z|=2} \frac{e^{i\pi z}}{(z-1)(z+3)} dz.$$

Lösung:

- a) Eine geeignete Stammfunktion ist $\log(-(z-1))$. Diese Stammfunktion ist analytisch auf demjenigen Schlitzgebiet, dessen Schlitz beim Punkt 1 beginnt und auf der reellen Achse nach rechts geht. Die Kurve C ist eine Strecke auf der I. Winkelhalbierenden, die die reelle Achse nur im Punkt 0 schneidet. Damit liegt C vollständig im beschriebenen Schlitzgebiet. *ausagekräftige Skizze genügt*

Der Anfangspunkt ist $-1 - 2i$, der Endpunkt ist $1 + 2i$.

Es ist also

$$\begin{aligned} \int_C \frac{1}{z-1} dz &= \log(-(1+2i)-1) - \log(-(-1-2i)-1) = \log(-2i) - \log(2+2i) \\ &= (\ln 2 - i\frac{\pi}{2}) - (\ln \sqrt{8} + \frac{\pi}{4}i) = -\ln \sqrt{2} - \frac{3\pi}{4}i. \end{aligned}$$

- b) Man setzt

$$f(z) = \frac{ze^{i\pi z}}{z+3}$$

Die Funktion f ist analytisch auf der offenen Kreisscheibe $|z| = \frac{5}{2}$, welche den Integrationskreis $|z| = 2$ enthält, in welchem wiederum der Punkt 1 liegt.

Damit gilt nach der Integralformel von Cauchy

$$\int_{|z|=2} \frac{ze^{i\pi z}}{(z-1)(z+3)} dz = \int_{|z|=2} \frac{f(z)}{z-1} dz = 2\pi i \cdot f(1) = 2\pi i \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{\pi}{2}i$$

3. Aufgabe

13 Punkte

Werten Sie die nachfolgenden Integrale aus. Sie brauchen nicht ausführlich zu begründen, dass die Voraussetzungen der von Ihnen verwendeten Sätze erfüllt sind.

a) (9 Punkte) $\int_{|z|=\frac{3}{2}} \frac{1}{(e^{i\pi z} - 1)(z - 1)} dz$, b) (4 Punkte) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + 2x + 10} dx$.

Lösung:

- a) Der Integrand hat innerhalb des Kreises $|z| = \frac{3}{2}$ an den Stellen 0 und 1 isolierte Singularitäten.

Damit gilt nach dem Residuensatz

$$\int_{|z|=\frac{3}{2}} \frac{1}{(e^{i\pi z} - 1)(z - 1)} dz = 2\pi i \left(\operatorname{Res} \left(\frac{1}{(e^{i\pi z} - 1)(z - 1)}, 0 \right) + \operatorname{Res} \left(\frac{1}{(e^{i\pi z} - 1)(z - 1)}, 1 \right) \right).$$

Berechnung der Residuen: Wir schreiben

$$f(z) = \frac{1}{(e^{i\pi z} - 1)(z - 1)}$$

Für die Singularität 0 setzen wir

$$f(z) = \frac{g_0(z)}{h_0(z)}$$

mit

$$g_0(z) = \frac{1}{z - 1}, \quad h_0(z) = e^{i\pi z} - 1$$

Es ist $g_0(0) = -1$, $h_0(0) = 0$. Mit $h'_0(z) = i\pi e^{i\pi z}$ ist $h'_0(0) = i\pi$. Es gilt also $g_0(0) \neq 0$, $h_0(0) = 0$ und $h'_0(0) \neq 0$. Somit ist die Stelle 0 eine Polstelle 1. Ordnung von f , und es ist

$$\operatorname{Res} \left(\frac{1}{(e^{i\pi z} - 1)(z - 1)}, 0 \right) = \frac{g_0(0)}{h'_0(0)} = \frac{-1}{i\pi} = \frac{i}{\pi}.$$

Für die Singularität 1 setzen wir

$$f(z) = \frac{g_1(z)}{h_1(z)}$$

mit

$$g_1(z) = \frac{1}{e^{i\pi z} - 1}, \quad h_1(z) = z - 1.$$

Es ist $g_1(0) = -\frac{1}{2}$, $h_1(0) = 0$. Mit $h'_1(z) = 1$ ist $h'_1(0) = 1$. Es gilt also $g_1(0) \neq 0$, $h_1(0) = 0$ und $h'_1(0) \neq 0$. Somit ist die Stelle 1 eine Polstelle 1. Ordnung von f , und es ist

$$\operatorname{Res} \left(\frac{1}{(e^{i\pi z} - 1)(z - 1)}, 1 \right) = \frac{g_1(1)}{h'_1(1)} = \frac{-\frac{1}{2}}{1} = -\frac{1}{2}$$

Schließlich ist

$$\begin{aligned} & \int_{|z|=\frac{3}{2}} \frac{1}{(e^{i\pi z} - 1)(z - 1)} dz \\ &= 2\pi i \left(\operatorname{Res} \left(\frac{1}{(e^{i\pi z} - 1)(z - 1)}, 0 \right) + \operatorname{Res} \left(\frac{1}{(e^{i\pi z} - 1)(z - 1)}, 1 \right) \right) \\ &= 2\pi i \left(\frac{i}{\pi} - \frac{1}{2} \right) = -2 - \pi i. \end{aligned}$$

b) Hier kann der einschlägige Satz benutzt werden.

Die Nullstellen von $x^2 + 2x + 10$ sind $-1 + 3i$ und $-1 - 3i$. Nur die Nullstelle $-1 + 3i$ liegt in der oberen Halbebene und ist in Ansatz zu bringen.

Dann gilt nach dem Satz:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + 2x + 10} dx = 2\pi i \left(\frac{1}{2x + 2} \right)_{|x=-1+3i} = 2\pi i \cdot \frac{1}{6i} = \frac{\pi}{3}.$$

4. Aufgabe

9 Punkte

Gegeben ist für eine Funktion $u(x, y)$ das Randwertproblem im $\mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned}\Delta u(x, y) &= 0, & \text{für } -x < y < 0, \\ u(x, 0) &= -x^2 & \text{für } x > 0, \\ u(x, -x) &= 2x^2 & \text{für } x > 0.\end{aligned}$$

Lösen Sie dieses Randwertproblem mit Hilfe der Methode der harmonischen Verpflanzung, indem Sie als Verpflanzungsabbildung die Funktion $f(z) = iz^2$ verwenden.

Hinweis: Als Ansatzfunktionen benutzen Sie die harmonischen Funktionen x und y .

Lösung:

Es ist

$$iz^2 = -2xy + i(x^2 - y^2).$$

Die Verpflanzungsabbildung als $\mathbb{R}^2$ -Funktion betrachtet:

$$(x, y) \mapsto (-2xy, x^2 - y^2) = (x', y').$$

Für die verpflanzte Funktion U mit $u = U \circ f$ werden die Randverläufe bestimmt:

$$u(x, 0) = -x^2 = U(0, x^2) \implies U(0, y') = -y'.$$

und

$$u(x, -x) = 2x^2 = U(2x^2, 0) \implies U(x', 0) = x'.$$

Offenbar besitzt die harmonische Funktion U mit

$$U(x', y') = x' - y'$$

die gewünschten Randverläufe. Es ist damit

$$u(x, y) = U(x', y') = x' - y' = -2xy - (x^2 - y^2) = -x^2 + y^2 - 2xy$$

die Lösung des vorgelegten Randwertproblems.

5. Aufgabe

10 Punkte

Mit K bezeichnen wir den positiv durchlaufenen Kreis mit Mittelpunkt $\frac{1}{2}$ und Radius $\frac{1}{2}$. Für $z \in K$ gilt also $|z - \frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$.

Es gibt genau eine Möbius-Transformation T mit folgenden Eigenschaften:

- T bildet die von links nach rechts durchlaufene reelle Achse $\rightarrow$ auf die von oben nach unten durchlaufende imaginäre Achse $\downarrow$ und den (positiv durchlaufenen) Kreis K auf die von rechts nach links durchlaufene reelle Achse $\leftarrow$ ab:

$$T(\rightarrow) = \downarrow, \quad T(K) = \leftarrow .$$

- Es gilt: $T(\frac{1}{2}) = -2i$.

Bearbeiten Sie die folgenden Aufgaben:

- a) Bestimmen Sie die Möbius-Transformation T .
- b) Bestimmen Sie das Bild $T(\downarrow)$. (Eine Skizze ist hilfreich.)

Lösung:

- a) $\rightarrow$ und K schneiden sich in den Punkten 0 und 1. Die Bilder $\downarrow$ und $\leftarrow$ schneiden sich in den Punkten 0 und ∞ .

Auf $\rightarrow$ liegen die Punkte 0, $\frac{1}{2}$, 1. Unter T werden diese Punkte auf 0, $-2i$, ∞ oder auf ∞ , $-2i$, 0 abgebildet. Die erste Abfolge bedeutet $\downarrow$, die zweite Abfolge $\uparrow$. Mit $T(\rightarrow) = \downarrow$ zeigt sich, dass die erste Abfolge die richtige ist.

Damit liegen diese drei Punktpaare vor:

$$T(0) = 0, \quad T\left(\frac{1}{2}\right) = -2i, \quad T(1) = \infty.$$

Aus erstem und drittem Punktpaar ergibt sich

$$T(z) = \frac{az}{z-1}.$$

Es ist dann

$$T\left(\frac{1}{2}\right) = -a,$$

mit $T(\frac{1}{2}) = -2i$ ist also $a = 2i$.

Die Möbius-Transformation T ist durch

$$T(z) = \frac{2iz}{z-1}$$

gegeben.

b) Auf $\downarrow$ liegen die Punkte $0, -i, \infty$. Es ist

$$T(0) = 0, \quad T(-i) = \frac{2i \cdot (-i)}{-i - 1} = -\frac{2}{1 + i} = -(1 - i) = -1 + i, \quad T(\infty) = 2i.$$

Der (allgemeine) Bildkreis geht durch die Punkte $0, -1 + i$ und $2i$. Eine Skizze zeigt, dass es sich um den Kreis mit Mittelpunkt i und Radius 1 handelt, der negativ durchlaufen wird. Die von oben nach unten durchlaufene imaginäre Achse $\downarrow$ wird auf diesen Kreis abgebildet.

6. Aufgabe

8 Punkte

Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind, und geben Sie dabei jeweils eine Begründung an.

(Jede richtige und vollständig begründete Antwort gibt die jeweils angegebenen Punkte. Antworten ohne Begründung geben keine Punkte.)

Antworten Sie bitte *nur* auf Ihren Lösungsblättern!

a) (2 Punkte) Es gilt

$$\int_{|z+1|=1} \frac{z^2}{z-1} dz = -1.$$

Antwort: Falsch.

Der Integrand ist analytisch auf $G = \mathbb{C} \setminus \{1\}$. Der Integrationsweg (positiv durchlaufener Kreis mit Mittelpunkt -1 und Radius 1) liegt vollständig in G . Nach dem Integralsatz von Cauchy verschwindet das vorliegende Integral.

b) (3 Punkte) Es gilt

$$\int_{|z|=1} e^{\frac{1}{z}} dz = 2\pi i.$$

Antwort:

Wahr.

Der Integrand hat am Punkt 0 seine einzige Singularität. Diese Singularität ist isoliert, damit gilt nach dem Residuensatz

$$\int_{|z|=1} e^{\frac{1}{z}} dz = 2\pi i \operatorname{Res}\left(e^{\frac{1}{z}}, 0\right).$$

Zur Bestimmung des Residuums wird die Laurent-Entwicklung um den Punkt 0 herangezogen; sie ist gegeben durch

$$e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{-n}.$$

Das Residuum des Integranden ist der Koeffizient für $n = 1$, der also gleich 1 ist:

$$\operatorname{Res}\left(e^{\frac{1}{z}}, 0\right) = 1$$

Damit ist in der Tat

$$\int_{|z|=1} e^{\frac{1}{z}} dz = 2\pi i \cdot 1 = 2\pi i.$$

c) (3 Punkte) Das Polynom $x^3 + 4x^2 + 7x + 4$ ist stabil.

Antwort: Wahr.

α) Die Nullstelle -1 ist schnell geraten und hat negativen Realteil.

Nach Polynomdivision oder mit Horner-Schema findet man

$$x^3 + 4x^2 + 7x + 4 = (x + 1)(x^2 + 3x + 4)$$

Die Koeffizienten des quadratischen Polynoms sind positiv, damit haben dessen Nullstellen ebenfalls negativen Realteil.

Alle drei Nullstellen haben negativen Realteil. Damit ist das vorliegende Polynom stabil.

β) Routh-Schema: $n = 3$, also 4 Zeilen:

$$\begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 4 & 4 \\ 6 & 0 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

(vgl. Skript S. 85, Beispiel 93)

Die Koeffizienten in der ersten Spalte sind sämtlich positiv. Damit ist das gestellte Polynom stabil.

γ) Die Koeffizienten des vorliegenden Polynoms sind sämtlich positiv.

Routh-Hurwitz-Matrix

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 4 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Bei kubischen Polynomen braucht nur die „mittlere“ Abschnittsdeterminante in Augenschein genommen zu werden:

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = 24$$

Diese Determinante ist positiv.

Damit ist das vorliegende Polynom stabil.