

Lösung zur Klausur 10. Oktober 2023

1. Aufgabe

10 Punkte

Bestimmen Sie für das dynamische System

$$\begin{aligned}-(x-3)(y-1) &= \dot{x} \\ (x-4)(y-2) &= \dot{y}\end{aligned}$$

die Gleichgewichtspunkte zusammen mit ihrem Stabilitätscharakter (*asymptotisch stabil, stabil, instabil*).

Hinweis: Beachten Sie das Minuszeichen in der Gleichung für $\dot{x}$.

Lösung:

Für die Gleichgewichtspunkte (GGP) (x^*, y^*) gilt

$$\begin{aligned}-(x^* - 3)(y^* - 1) &= 0 \\ (x^* - 4)(y^* - 2) &= 0,\end{aligned}$$

woraus folgt $(x^*, y^*) = (3, 2)$ und $(x^*, y^*) = (4, 1)$.

Es handelt sich um ein nichtlineares dynamisches System, deshalb verwenden wir den Stabilitätssatz für den nichtlinearen Fall.

Die Jacobi-Matrix $\mathcal{J}(x, y)$ ist gegeben durch

$$\mathcal{J}(x, y) = \begin{pmatrix} -(y-1) & -(x-3) \\ y-2 & x-4 \end{pmatrix}.$$

Für den GGP $(3, 2)$ ist

$$\mathcal{J}(3, 2) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Die Jacobi-Matrix $\mathcal{J}(3, 2)$ hat den doppelten Eigenwert -1 . Alle Eigenwerte haben negativen Realteil, damit ist nach dem Stabilitätssatz für den nichtlinearen Fall der GGP $(3, 2)$ asymptotisch stabil.

Für den GGP $(4, 1)$ ist

$$\mathcal{J}(4, 1) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom ist $\lambda^2 - 1$, welches die Nullstellen 1 und -1 hat. Die Jacobi-Matrix $\mathcal{J}(4, 1)$ hat somit einen Eigenwert mit positivem Realteil. Damit ist nach dem Stabilitätssatz für den nichtlinearen Fall der GGP $(4, 1)$ instabil.

2. Aufgabe

10 Punkte

Gegeben ist die Kurve

$$\mathcal{C} : t \mapsto e^{it}, \quad 0 \leq t \leq \pi.$$

Die Kurve $\mathcal{C}$ stellt einen Halbkreis in der oberen komplexen Halbebene dar.

Werten Sie die nachfolgenden Integrale aus:

$$\text{a) } \int_{\mathcal{C}} \frac{\operatorname{Im} z}{z} dz, \quad \text{b) } \int_{\mathcal{C}} \frac{1}{z-2} dz.$$

Lösung:

a) Dieses Integral wird als Parameterintegral ausgewertet:

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} \frac{\operatorname{Im} z}{z} dz &= \int_0^\pi \frac{\operatorname{Im} e^{it}}{e^{it}} i e^{it} dt = i \int_0^\pi \sin t dt \\ &= i [-\cos t]_0^\pi = i((+1) - (-1)) = 2i. \end{aligned}$$

b) Dieses Integral wird mit Hilfe einer Stammfunktion ausgewertet. Eine geeignete Stammfunktion ist $\log(-(z-2))$. Sie ist analytisch auf demjenigen Schlitzgebiet, dessen Schlitz beim Punkt 2 beginnt und auf der reellen Achse nach rechts geht. Der obere Halbkreis $\mathcal{C}$ liegt vollständig links vom Schlitz. *aussagekräftige Skizze genügt*

Der Anfangspunkt ist 1, der Endpunkt ist -1 .

Es ist also

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{1}{z-2} dz = \log(-(-1-2)) - \log(-(1-2)) = \ln 3 - \ln 1 = \ln 3.$$

3. Aufgabe

13 Punkte

Werten Sie die nachfolgenden Integrale aus. Sie brauchen nicht ausführlich zu begründen, dass die Voraussetzungen der von Ihnen verwendeten Sätze erfüllt sind.

$$\text{a) (9 Punkte) } \int_{|z|=2} \frac{1}{(z - \frac{\pi}{2})^2 \sin z} dz, \quad \text{b) (4 Punkte) } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2 + 4)(x^2 + 9)} dx.$$

Lösung:

- a) Der Integrand hat innerhalb des Kreises $|z| = 2$ an den Stellen 0 und $\frac{\pi}{2}$ isolierte Singularitäten.

Es gilt nach dem Residuensatz

$$\int_{|z|=2} \frac{1}{(z - \frac{\pi}{2})^2 \sin z} dz = 2\pi i \left(\text{Res} \left(\frac{1}{(z - \frac{\pi}{2})^2 \sin z}, 0 \right) + \text{Res} \left(\frac{1}{(z - \frac{\pi}{2})^2 \sin z}, \frac{\pi}{2} \right) \right).$$

Wir betrachten die Singularität $z = 0$. Im Schema „ $\frac{g(z)}{h(z)}$ “ ist

$$g(z) = \frac{1}{(z - \frac{\pi}{2})^2}, \quad h(z) = \sin z.$$

Mit $g(0) = \frac{4}{\pi^2} \neq 0$, $h(0) = 0$ und $h'(0) = \cos 0 = 1 \neq 0$ stellt die Singularität einen Pol 1. Ordnung dar. Es ist dann

$$\text{Res} \left(\frac{1}{(z - \frac{\pi}{2})^2 \sin z}, 0 \right) = \frac{g(0)}{h'(0)} = \frac{\frac{4}{\pi^2}}{1} = \frac{4}{\pi^2}.$$

Die Singularität $\frac{\pi}{2}$ stellt einen Pol 2. Ordnung dar. Dazu schreibt man:

$$\frac{1}{(z - \frac{\pi}{2})^2 \sin z} = \frac{\frac{1}{\sin z}}{(z - \frac{\pi}{2})^2}$$

Der Zähler $\frac{1}{\sin z}$ ist analytisch in einer Umgebung von $\frac{\pi}{2}$ und ist für $z = \frac{\pi}{2}$ von Null verschieden. Damit stellt die Nullstelle $\frac{\pi}{2}$ des Nenners $(z - \frac{\pi}{2})^2$ eine Polstelle 2. Ordnung dar.

Es ist

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}\left(\frac{1}{(z-\frac{\pi}{2})^2 \sin z}, 1\right) &= \lim_{z \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{d}{dz} \left(\left(z - \frac{\pi}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{(z - \frac{\pi}{2})^2 \sin z} \right) \\ &= \lim_{z \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{\sin z} \right) = \lim_{z \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(-\frac{\cos z}{\sin^2 z} \right) = -\frac{\cos \frac{\pi}{2}}{\sin^2 \frac{\pi}{2}} = 0.\end{aligned}$$

Damit gilt

$$\begin{aligned}\int_{|z|=2} \frac{1}{(z-\frac{\pi}{2})^2 \sin z} dz, &= 2\pi i \left(\operatorname{Res}\left(\frac{1}{(z-\frac{\pi}{2})^2 \sin z}, 0\right) + \operatorname{Res}\left(\frac{1}{(z-\frac{\pi}{2})^2 \sin z}, 1\right) \right) \\ &= 2\pi i \left(\frac{4}{\pi^2} + 0 \right) = \frac{8}{\pi} i.\end{aligned}$$

b) Hier kann der einschlägige Satz benutzt werden.

Die vier Nullstellen von $(x^2 + 4)(x^2 + 9)$ sind $\pm 2i$ und $\pm 3i$. Nur die Nullstellen $2i$ und $3i$ liegen in der oberen Halbebene und sind in Ansatz zu bringen.

Dann gilt nach dem Satz:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2 + 4)(x^2 + 9)} dx \\ &= 2\pi i \left[\left(\frac{x^2}{2x \cdot (x^2 + 9) + (x^2 + 4) \cdot 2x} \right)_{|x=2i} + \left(\frac{x^2}{2x \cdot (x^2 + 9) + (x^2 + 4) \cdot 2x} \right)_{|x=3i} \right] \\ &= 2\pi i \left[\frac{-4}{4i \cdot 5 + 0} + \frac{-9}{0 + (-5) \cdot 6i} \right] = 2\pi i \left[-\frac{1}{5i} + \frac{3}{10i} \right] = 2\pi i \cdot \frac{1}{10i} = \frac{\pi}{5}.\end{aligned}$$

(Man kann natürlich auch nach dem Schema „ $\frac{g(z)}{h'(z)}$ “ und somit ohne Produktregel rechnen.)

4. Aufgabe

10 Punkte

Gegeben ist für eine Funktion $u(x, y)$ das Randwertproblem im $\mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned}\Delta u(x, y) &= 0 && \text{für } 0 < y < x, \\ u(x, 0) &= x^4 && \text{für } x > 0, \\ u(x, x) &= -4x^4 + 6x^2 && \text{für } x > 0.\end{aligned}$$

Lösen Sie dieses Randwertproblem mit Hilfe der Methode der harmonischen Verpflanzung, indem Sie als Verpflanzungsabbildung die Funktion $f(z) = z^2$ verwenden.

Hinweis: Als Ansatzfunktionen benutzen Sie die harmonischen Funktionen x , y und $x^2 - y^2$.

Lösung:

Es ist

$$z^2 = (x^2 - y^2) + i \cdot 2xy.$$

Die Verpflanzungsabbildung als $\mathbb{R}^2$ -Funktion betrachtet:

$$(x, y) \mapsto (x^2 - y^2, 2xy) = (x', y').$$

Für die verpflanzte Funktion U mit $u = U \circ f$ werden die Randverläufe bestimmt:

$$u(x, 0) = x^4 = U(x^2, 0) \implies U(x', 0) = x'^2.$$

und

$$u(x, x) = -4x^4 + 6x^2 = U(0, 2x^2) \implies U(0, y') = -y'^2 + 3y'.$$

Offenbar besitzt die harmonische Funktion U mit

$$U(x', y') = x'^2 - y'^2 + 3y'$$

die gewünschten Randverläufe. Es ist damit

$$u(x, y) = U(x', y') = x'^2 - y'^2 + 3y' = (x^2 - y^2)^2 - 4x^2y^2 + 6xy$$

die Lösung des vorgelegten Randwertproblems.

5. Aufgabe

10 Punkte

Es gibt genau eine Möbius-Transformation T mit folgenden Eigenschaften:

$$T(0) = 0, \quad T(\infty) = 2i, \quad T(1) = \infty.$$

- a) Bestimmen Sie die Möbius-Transformation T .
- b) Ermitteln Sie für die von links nach rechts durchlaufene reelle Achse $\rightarrow$ das Bild $T(\rightarrow)$.
- c) Mit $\nearrow$ werde die gerichtete Gerade bezeichnet, die durch 0 und $1 + i$ in dieser Reihenfolge läuft.

Zeigen Sie, dass $\nearrow$ von T auf einen Kreis K mit endlichem Radius abgebildet wird. Geben Sie Mittelpunkt und Radius von K an, hierzu reicht eine aussagekräftige Skizze aus.

Lösung:

- a) Wir schreiben:

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

mit zu bestimmenden komplexen Koeffizienten a, b, c und d .

Mit $T(0) = 0$ ist

$$T(0) = \frac{b}{d} = 0 \implies b = 0.$$

Mit $T(\infty) = 2i$ ist

$$T(\infty) = \frac{a}{c} = 2i \implies a = 2ic.$$

Mit $T(1) = \infty$ ist

$$T(1) = \frac{a + b}{c + d} = \infty \implies c + d = 0 \implies d = -c.$$

Alles zusammengefasst:

$$a = 2ic, \quad b = 0, \quad d = -c,$$

folglich

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{2icz + 0}{cz - c} = \frac{2iz}{z - 1}.$$

- b) Die reelle Achse $\rightarrow$ läuft durch $0, 1, \infty$ in dieser Reihenfolge. Die Bilder dieser Punkte sind $0, \infty, 2i$. Sie liegen auf der imaginären Achse und werden von oben nach unten durchlaufen. Das Bild $T(\rightarrow)$ ist die von oben nach unten durchlaufene imaginäre Achse; symbolisch: $T(\rightarrow) = \downarrow$.
- c) Betreffs $\nearrow$ wird nur der Bildpunkt $T(1 + i)$ noch berechnet:

$$T(1 + i) = \frac{2i(1 + i)}{(1 + i) - 1} = 2(1 + i) = 2 + 2i.$$

Auf $\nearrow$ liegen die Punkte $0, 1 + i$ und ∞ , welche nun auf $0, 2 + 2i$ und $2i$ abgebildet werden. Diese Punkte liegen nicht auf einer Geraden, damit ist das Bild $T(\nearrow)$ ein Kreis mit endlichem Radius.

Eine Skizze zeigt, dass dieser Kreis den Mittelpunkt $1 + i$ und den Radius $\sqrt{2}$ hat.

6. Aufgabe

7 Punkte

Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind, und geben Sie dabei jeweils eine Begründung an.

(Jede richtige und vollständig begründete Antwort gibt die jeweils angegebenen Punkte. Antworten ohne Begründung geben keine Punkte.)

Antworten Sie bitte *nur* auf Ihren Lösungsblättern!

- a) (2 Punkte) Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x^3 - 3xy^2$ nimmt auf der abgeschlossenen Kreisscheibe $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$ ihr Minimum im Punkt $(0, 0)$ an.

Antwort: Falsch.

- α) Die Funktion f ist harmonisch:

$$\Delta(x^3 - 3xy^2) = (6x - 0) + (0 - 6x) = 0.$$

Harmonische Funktionen auf kompakten Bereichen nehmen ihre Extrema stets am Rand an. Der Punkt $(0, 0)$ liegt aber nicht auf dem Rand.

- β) Es gilt $f(0, 0) = 0$. Dieser Wert wird aber z.B. an der Stelle $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ unterboten:

$$f(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{8} - 3 \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{4} = -\tfrac{2}{8} = -\tfrac{1}{4}$$

- b) (2 Punkte) Es gilt

$$\int_{|z|=1} ze^{z^2} dz = 0.$$

Antwort:

Wahr.

Der Integrand ist auf ganz $\mathbb{C}$ analytisch. Der Integrationsweg ist eine geschlossene Kurve in $\mathbb{C}$. Damit ist das Integral nach dem Integralsatz von Cauchy gleich Null.