Aufgabe 1:

Ist die folgende Funktion stetig in (0, 0) ?
(Natürlich mit Begründung!)

$$f(x,y) = \frac{x^3 y^2}{\left(x^4 + 3x^2 y^2 + y^4\right)} \qquad (x,y) \neq (0,0)$$

$$= 0 \qquad (x,y) = (0,0)$$

2,0	

Aufgabe 2:

a) Bestimme die lokalen Maxima, die lokalen Minima und die Sattelpunkte der Funktion

$$f(x,y) = e^{-y}\left(x^2 + y^2\right)$$

b) Zeige, daß (0, 0) eine Extremalstelle ist von der Funktion

$$f(x,y) = \left(x^2 - y^2\right)\left(x - 4y^2\right).$$

Bestimme, ob es ein lokales Maxima, lokales Minima oder ein Sattelpunkt ist.

4,0	

Aufgabe 3:

Sei $B = \left\{ (x,y) \mid (x - \sqrt{3}\,y)(\sqrt{3}\,x - y) \leq 0,\ x^2 + y^2 \leq 4 \right\}$

a) Berechne den Flächeninhalt von B

b) Berechne $\displaystyle\iint_G \frac{(x+y)}{\left(x^2+y^2\right)}\,dx\,dy$

c) Berechne $\displaystyle\iint_G \frac{x\,y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy$

3,0	

Aufgabe 4:

Berechne die Fläche des Graphen von $f(x,y) = \sqrt{2 - x^2 - y^2}$

über das Gebiet $\{ (x,y) \mid x \geq 0,\ x^2 + y^2 \leq 1 \}$

3,0	

Aufgabe 5:

Gegeben sei die Kurve $\vec{x}(t) = \left(t \sin t + \cos t,\ -t \cos t + \sin t,\ \frac{1}{3} t^3 \right)$.

a) Berechne die Länge des Kurvenstücks $\{ \vec{x}(t) \mid 0 \leq t \leq T \}$, mit $T > 0$.

b) Berechne den Punkt $\vec{x}(t_0)$, so daß die Länge des Kurvenstücks von $\vec{x}(0)$ nach $\vec{x}(t_0)$ gleich ist an $\frac{7}{3}$.

3,0	

Aufgabe 6:

Gib die allgemeinen Lösungen der folgenden Differentialgleichungen an:

a) $y' = -2(x-1)(y+2)^2$.

b) $y'' + 2y' - 3y = 10\,e^{-3x}$.

Gib auch die Lösung von b) mit Anfangswerten $y(0) = y'(0) = 0$.

4,0	

Aufgabe 7:

Die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \cos(x + \alpha_1) & x \in [0, \pi] \\ -\cos(-x + \alpha_1) & x \in [-\pi, 0] \end{cases}, \quad \alpha_1 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

werde 2π-periodisch fortgesetzt.

$$S_f(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

sei die zugehörige Fourierreihe. Berechne die Koeffizienten a_n, b_n.

Hinweis : $\sin u \cos v = \frac{1}{2}\left(\sin(u+v) + \sin(u-v)\right)$.

3,0	

Aufgabe 8:

Löse die Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

mit den Anfangsbedingungen

$$u(x,0) = x^2$$
$$u_y(x,0) = \sinh x.$$

3,0	