Technische Universität Berlin, 05.04.2024

Name:

Matr.-Nr.:

Schriftlicher Test: Berechenbarkeit und Komplexität (Wiederholung)

(Weller/Froese/Kellerhals/Kunz, Wintersemester 2023/2024)

Bearbeitungszeit:	60 Minuten
Max. Punktzahl:	50 Punkte

Aufgabe Nr.:	1	2	3	**Summe**
Punktzahl:				
Davon erreicht:				

Allgemeine Hinweise:

- Es sind keinerlei Hilfsmittel erlaubt.
- Benutzen Sie einen dokumentenechten Stift in der Farbe schwarz ode keinen Bleistift, sondern einen Kugelschreiber.
- Beschriften Sie jedes Blatt mit ihrem Vor- und Nachnamen und ihrer Matrikelnummer.
- **Falls es in der Aufgabenstellung nicht explizit ausgeschlossen wird, so sind alle Antworten zu begründen! Antworten ohne Begründung erhalten 0 Punkte.**
- Sie dürfen alle Aussagen **und Mitteilungen** aus den Vorlesungsfolien als bekannt annehmen, es sei denn der Beweis einer solchen Aussage ist explizit gefordert (dies schließt Forderungen nach logisch äquivalenten Aussagen wie der Kontraposition der Aussage mit ein).

Erinnerung an Erkenntnisse der Vorlesung:

- Q ist in NP, falls Ja-Instanzen von Q in Polynomzeit verifizierbar sind, d.h. es existiert eine deterministische, polynomzeitbeschränkte TM M, sodass für alle x gilt

  $$x \in Q \iff \exists_{u \in \Sigma^{\text{poly}(|x|)}} \langle x, u \rangle \in T(M).$$

  Q ist in coNP, falls Nein-Instanzen von Q in Polynomzeit verifizierbar sind (analog zu oben).
- Für alle $\mathcal{X} \in \{\text{NP}, \text{coNP}, \text{PSPACE}\}$ ist Q $\mathcal{X}$-schwer (-vollständig), falls $\forall_{L \in \mathcal{X}}\ L \leq_m^p Q$ (und $Q \in \mathcal{X}$).
- Die Menge TQBF aller wahren quantifizierten aussagenlogischen Formeln ist PSPACE-vollständig und entscheidbar.
- $\leq_m^p$ ist transitiv.
- $\text{coNP} = \{L \mid \overline{L} \in \text{NP}\}$
- $\text{PSPACE} = \{L \mid L \leq_m^p \text{TQBF}\}$
- 2-SAT $\in$ P
- $\overline{\text{SAT}}$ und TAUT sind coNP-vollständig.
- SAT, Vertex Cover und Clique sind NP-vollständig.
- P = coP

Viel Erfolg!

16 (16 Punkte)

Aufgabe 1: **Vermischtes**

(a) Geben Sie für jede der folgenden Aussagen an, ob diese korrekt ist oder nicht (ohne Begründung). (4 P) 4

(1) $2^n \in O(2^{n/2})$ falsch

(2) $n \log n \in O(2n)$ falsch

(3) $2^n n^2 \in O(3^n)$ wahr

(4) $n! \in O(n^n)$ wahr

(b) Beweisen Sie **drei** der folgenden Aussagen. (Für die anderen Aussagen brauchen Sie nichts beweisen, manche Aussagen sind auch nicht wahr. Das Widerlegen von falschen Aussagen gibt keine Punkte) (12 P) 12

~~(1)~~ SAT $\leq_m^p \overline{\text{SAT}}$

(2) Eine Sprache A ist genau dann NP-schwer, wenn $\overline{A}$ coNP-schwer ist.

~~(3)~~ P = NP $\cap$ coNP

(4) Wenn eine NP-schwere Sprache in P liegt, dann gilt P = NP.

(5) P $\neq$ PSPACE $\implies$ P $\neq$ NP

(6) P $\subseteq$ NP $\cap$ coNP

b) 2) Sei A NP-schwer, also gilt für

1+3 alle Sprachen $B \in NP$, dass es eine

Polynomzeitreduk. $B \leq_m^p A$ gibt.

Nach Def. ~~liegt~~ gilt $\overline{B} \in coNP$.

Aus $B \leq_m^p A$ folgt $\overline{B} \leq_m^p \overline{A}$, also lassen

sich alle Sprachen in coNP auf $\overline{A}$ ~~reduzie~~

polynomzeitreduzieren, also ~~gilt~~ ist

$\overline{A}$ coNP schwer.

Name: **Matr.-Nr.:**

(Leere Seite für Notizen oder Ähnliches; bei Lösungen bitte zugehörige Aufgabe klar kennzeichnen!)

$2^{\frac{n}{2}} = \sqrt{2^n} = \sqrt{2}^n$

$\sqrt{2}^n \cdot \sqrt{2}^n \in$

$2^n n^2 = \left(\frac{2 \cdot 3}{3}\right)^n n^2$

$= \left(\frac{2}{3}\right)^n 3^n n^2$

$\left(\frac{2}{3}\right)^n n^2 \in O(1)$

b) 6) Da jede DTM auch eine NTM ist, ist jede
1+3
Sprache in P auch in NP, also $P \subseteq NP$.
Da $P = coP$ ist jede Sprache A in P auch ~~in~~
coP und $\overline{A}$ damit in P. $\overline{A}$ ist folglich in NP
und nach Def. ist A in coNP also folgt
$P \subseteq coNP \Rightarrow P \subseteq NP \cap coNP$

4) Sei A eine NP-schwere Sprache. Wenn A in
1+3
P liegt, ~~gibt es~~ gilt $A \leq_m^p$ 2-SAT. Sei
~~B~~ ~~[illegible]~~ Nach Def. lassen sich alle Sprachen
in NP auf A reduzieren und mit der Transitivität
von $\leq_m^p$ lassen sich alle Sprachen in NP auf
2-SAT reduzieren und sind damit in P, also
$NP \subseteq P$. Mit $P \subseteq NP$ gilt also $P = NP$.

(16 Punkte)

Aufgabe 2: **Polynomzeitreduktionen**

(10 P)

(a) Beweisen oder widerlegen Sie jeweils, dass $\leq_m^p \cdots$

9,5

(i) . . . transitiv ist.

(ii) . . . symmetrisch ist.

Hinweis: Eine binäre Relation R ist *symmetrisch*, falls für alle x, y gilt: $xRy \iff yRx$.

(b) Wir definieren eine *Spezialreduktion* von einer Sprache $A \subseteq \Sigma^*$ auf eine Sprache $B \subseteq \Sigma^*$ als eine polynomzeitberechenbare Funktion $f\colon \Sigma^* \to \Sigma^*$, für die $w \in B$ und $w' \in \Sigma^* \setminus B$ existieren, sodass für alle $x \in \Sigma^*$ gilt: (6 P) 0

$$f(x) = \begin{cases} w, & x \in A \\ w', & x \notin A \end{cases}.$$

Falls so eine Spezialreduktion von A auf B existiert, so schreiben wir $A \preceq B$.

Beweisen Sie: Falls $A \preceq B$ für Sprachen A und B gilt, so liegt A in P.

Es gelte $A \leq B$. Wenn ein Wort ~~...~~ $z \in A$ ist, ist $f(z) = w$, also ist w in B. Wenn ein Wort $z \notin A$ ist, ist $f(z) = w'$, also ist w' nicht in B. Das einzige Wort in

No B ist also w. Eine DTM kann in Polynomzeit entscheiden, ob ein Wort in B ist, in dem

folglich auch No es ~~einf~~ Buchstabe für Buchstabe mit w vergleicht. B ist also in P. ~~da~~ Da f in Polynomzeit berechenbar ist, gilt $A \leq_m^p B$ und A ist auch in P.

Name: .

Matr.-Nr.:

(Leere Seite für Notizen oder Ähnliches; bei Lösungen bitte zugehörige Aufgabe klar kennzeichnen!)

4 a) ii) Gegenbsp.: Aus der VL wissen wir, dass SAT auf H polynomzeitreduzierbar ist, also $SAT \leq_m^p H$. SAT ist entscheidbar berechenbar aber H nicht, also kann nicht auch $H \leq_m^p SAT$ gelten.

5,5 i) Sei $A \leq_m^p B$ und $B \leq_m^p C$.
Sei f eine Polynomzeitreduktion von A auf B und g eine Polynomzeitred. von B auf C. f und g sind nach ~~Def~~. in ~~Pol~~ Polynomzeit berechenbar. Wir betrachten

$g \circ f$, also zuerst f und dann g anzuwenden. $g \circ f$ ist in der Zeit nicht g, sondern g(f) -0,5 von g + der Zeit von f berechenbar, also Summe zweier Polynome, also wieder in Polynomzeit. Wenn x in A ist, ist $f(x)$ in B und folglich $g(f(x))$ in C. Wenn x nicht in A ist, ist $f(x)$ nicht in B und folglich $g(f(x))$ nicht in C. $g \circ f$ ist also eine Polynomzeitred. von A auf C, also gilt $A \leq_m^p C$ und ~~folglich~~ damit ist Transitivität gezeigt.

Aufgabe 3: **NP-vollständige Probleme** 4 (18 Punkte)

Betrachten Sie die folgenden Probleme:

NOT-ALL-EQUAL-SAT

Eingabe: Eine aussagenlogische Formel φ in konjunktiver Normalform.

Frage: Existiert eine Belegung der Variablen von φ, sodass φ erfüllt ist und in keiner Klausel alle Literale den gleichen Wert annehmen?

SET SPLITTING

Eingabe: Eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ und m Teilmengen $X_1, \ldots, X_m$ von $\{1, \ldots, n\}$.

Frage: Gibt es disjunkte Teilmengen $P, Q \subseteq \{1, \ldots, n\}$ mit $P \cup Q = \{1, \ldots, n\}$ und $X_j \nsubseteq P$ und $X_j \nsubseteq Q$ für alle $1 \leq j \leq m$?

Betrachten Sie die totale Funktion f, die bei Eingabe einer kodierten KNF-Formel F mit Klauseln $C_1, \ldots, C_m$ und Variablen $x_1, \ldots, x_n$ die Kodierung von $m + n$ Teilmengen $X_1, \ldots, X_{m+n} \subseteq \{1, \ldots, 2n\}$ ausgibt, die wie folgt definiert sind:

- Für alle $1 \leq j \leq m$, sei $X_j := \{i \mid C_j \text{ enthält } x_i\} \cup \{n + i \mid C_j \text{ enthält } \overline{x}_i\}$.
- Für alle $1 \leq i \leq n$, sei $X_{m+i} := \{i, n + i\}$. $\emptyset$

(a) Geben Sie $f(\varphi)$ für $\varphi := (x_1 \vee x_2) \wedge (\neg x_1 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee x_3)$ an und zeigen Sie, dass sowohl φ eine Ja-Instanz von NOT-ALL-EQUAL-SAT als auch $f(\varphi)$ eine Ja-Instanz von SET SPLITTING ist. 4 (6 P)

(b) Zeigen Sie, dass es sich bei f um eine Polynomzeitreduktion von NOT-ALL-EQUAL-SAT auf SET SPLITTING handelt. (12 P)

b) Wir müssen zeigen, dass f in Polynomzeit berechenbar ist und dass
$\varphi \in$ N.A.E.SAT $\iff f(\varphi) \in$ Set Splitting.

Name:

(Leere Seite für Notizen oder Ähnliches; bei Lösungen bitte zugehörige Aufgabe klar kennzeichnen!)

a) $m = 3,\ n = 3$

$X_1 = \{1,2\} \cup \{\} = \{1,2\}$

$X_2 = \{3\} \cup \{4\} = \{3,4\}$

$X_3 = \{1,2,3\}$

$X_4 = \{1, \cancel{2}\, 4\}$

$X_5 = \{2,5\}$

$X_6 = \{3,6\}$

Ja-Instanz von Not-All-Equal-SAT:
$x_1 = 1,\ x_2 = 0,\ x_3 = 1.$ φ ist damit erfüllt und in keiner Klausel nehmen alle Literale den selben wert an.

Ja-Inst. von Set Spl.:
$P = \{1,3,5\}$, $Q = \{2,4,6\}$ weil kein X_j mit $1 \leq j \leq 6$ eine Teilmenge von P oder Q ist, da P nur ungerade und Q nur gerade Zahlen enthät während X_i jeweils gerade und ungerade Zahlen enthalten