Technische Universität Berlin, 24.02.2020

Name:

Matr.-Nr.: ....

Klausur: Berechenbarkeit und Komplexität (B)

(Niedermeier/Bentert/Kellerhals, Wintersemester 2019/2020)

Einlesezeit:	15 Minuten
Bearbeitungszeit:	60 Minuten
Max. Punktezahl:	50 Punkte

1	2	3	4	5	Σ
(9)	(10)	(10)	(13)	(8)	(50)

Allgemeine Hinweise:

- Es sind keinerlei Hilfsmittel erlaubt.
- Benutzen Sie einen dokumentenechten Stift in der Farbe schwarz oder blau. Insbesondere also keinen Bleistift, sondern einen Kugelschreiber.
- Beschriften Sie jedes Blatt mit ihrem Vor- und Nachnamen und ihrer Matrikelnummer.
- **Falls es in der Aufgabenstellung nicht explizit ausgeschlossen wird, so sind alle Antworten zu begründen! Antworten ohne Begründung erhalten 0 Punkte.**

Viel Erfolg!

Name: **Matr.-Nr.: ....**

Aufgabe 1: **Verständnis P und NP** (3 + 3 + 3 Punkte)

Begründen Sie in jeweils höchstens drei Sätzen, warum die folgenden Aussagen wahr bzw. falsch sind.

(a) Es gilt 2-COLORING $\leq_m^p$ 3-COLORING.

(b) Wenn für zwei Sprachen A, B gilt, dass A NP-schwer ist und $A \leq_m^p B$, so ist B NP-vollständig.

(c) Wenn für zwei Sprachen A, B gilt, dass A NP-schwer ist und $B \leq_m^p A$, so ist B NP-vollständig.

Hinweise: Sie können davon ausgehen, dass 2-COLORING $\in P$ und dass 3-COLORING NP-vollständig ist.

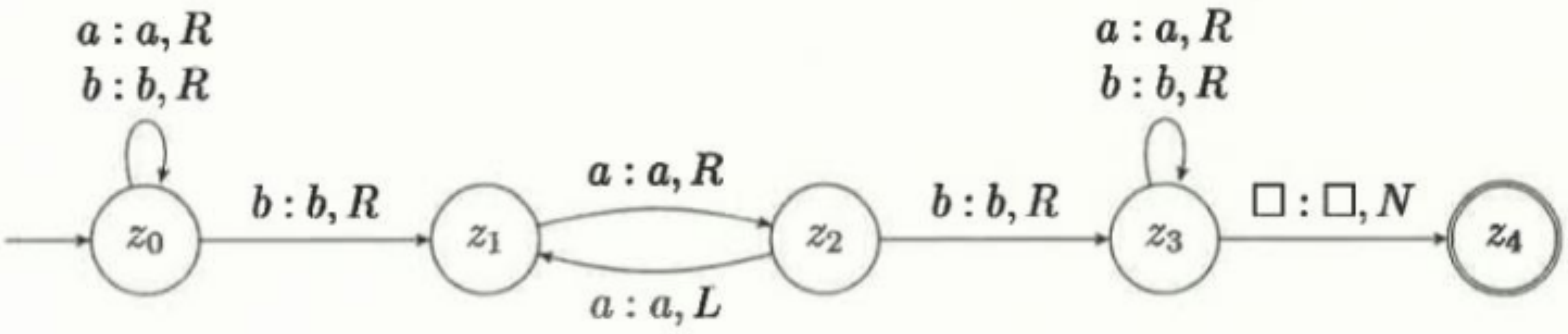
Name **Matr.-Nr.: .. ....**

Aufgabe 2: **Turing-Maschinen** (2 + 4 + 4 Punkte)

Betrachten Sie die folgende Turing-Maschine:

$$M = (\{z_0, z_1, z_2, z_3, z_4\}, \{a, b\}, \{a, b, \Box\}, \delta, z_0, \Box, \{z_4\}),$$

wobei δ wie folgt definiert ist:



(a) Ist M deterministisch?

(b) Wird das Wort *baab* von M akzeptiert?

(c) Geben Sie (ohne Begründung) die von M akzeptierte Sprache $T(M)$ an.

Name

Matr.-Nr.: ....

Aufgabe 3: **co-NP und PSPACE** **(3 + 5 + 2 Punkte)**

Die Königin plant die Sitzordnung ihrer n Gäste an dem großen runden Tisch mit n Sitzplätzen. Damit es keinen Streit gibt, möchte die Königin eine Sitzordnung finden, sodass jeder Gast neben zwei seiner Freunde sitzt. Eine solche Sitzordnung nennen wir *freundlich*.

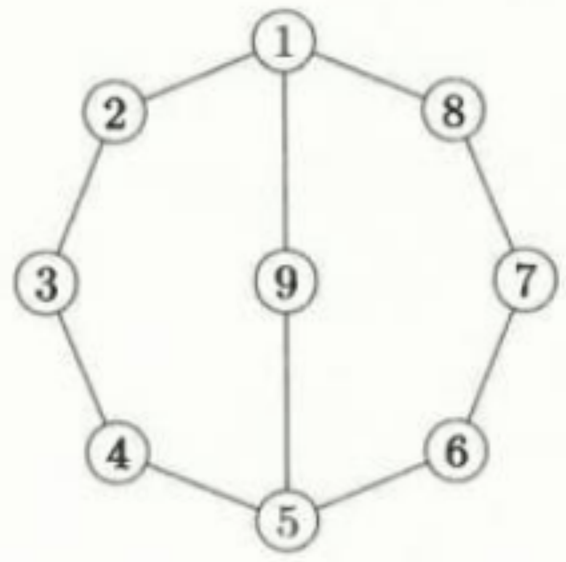
Nun behauptet der Hutmacher, dass es keine freundliche Sitzordnung gibt. Leider stößt er auf Probleme, die Königin davon zu überzeugen. Formal möchte der Hutmacher das folgende Problem lösen:

KEINE FREUNDSCHAFTLICHE SITZORDNUNG

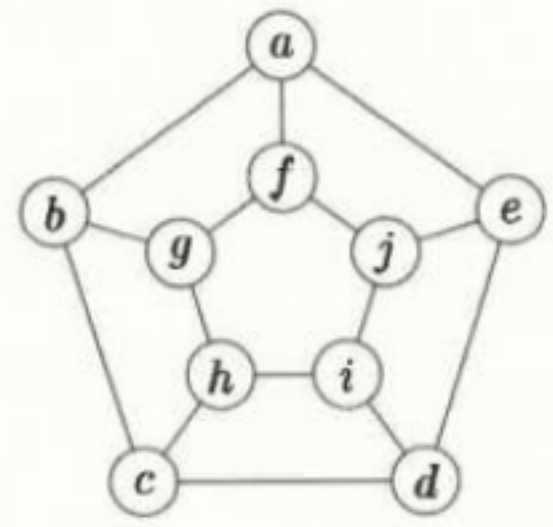
Eingabe: Der Freundschaftsgraph $G = (V, E)$, wobei jeder Knoten $v \in V$ einen Gast darstellt, und jede Kante $\{u, v\} \in E$ die Freundschaft zwischen Gästen u und v darstellt.

Frage: Ist es wahr, dass es keine freundschaftliche Sitzordnung der Gäste an einem runden Tisch gibt, das heißt, es gibt keinen Kreis, der jeden Knoten in V genau einmal enthält?

(a) Geben Sie (ohne Begründung) für die beiden folgenden Freundschaftsgraphen G_1 und G_2, ob eine freundschaftliche Sitzordnung existiert oder nicht. Wenn eine existiert, dann geben Sie eine an.



G_2



G_1

(b) Argumentieren Sie, warum KEINE FREUNDSCHAFTLICHE SITZORDNUNG in coNP ist.

(c) Folgt daraus, dass KEINE FREUNDSCHAFTLICHE SITZORDNUNG auch in PSPACE ist?

Aufgabe 4: **Reduktion** (4 + 9 Punkte)

Betrachten Sie die beiden folgenden Probleme.

VERTEX COVER

Eingabe: Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ und eine natürliche Zahl k.

Frage: Existiert eine Teilmenge $X \subseteq V$ mit $|X| \leq k$, sodass für jede Kante $\{v, w\} \in E$ mindestens einer der beiden Endpunkte in X enthalten ist, d.h. $v \in X$ oder $w \in X$?

FEEDBACK VERTEX SET

Eingabe: Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ und eine natürliche Zahl k.

Frage: Existiert eine Knotenmenge $X \subseteq V$ mit $|X| \leq k$, sodass jeder Kreis in G mindestens einen Knoten aus X enthält?

Gegeben sei die Funktion f, die wie folgt definiert ist. Sei $(G = (V, E), k)$ eine VERTEX COVER-Instanz, dann ist $f((G, k)) = (G^* = (V^* = V' \cup E', E^*), k)$ eine FEEDBACK VERTEX SET-Instanz, wobei gilt:

1. Für jeden Knoten $v \in V$ gibt es einen Knoten $v^* \in V'$.
2. Für jede Kante $e = \{v, w\} \in E$ gibt es einen Knoten $e' \in E'$ und die Kanten $\{v^*, e'\} \in E^*$ und $\{w^*, e'\} \in E^*$.
3. Für zwei Kanten $e \in E$ und $f \in E$ mit $e \neq f$ gibt es die Kante $\{e', f'\} \in E^*$.
4. Für jede Kante $e = \{v, w\} \in E$ gibt es eine Kante $e^* = \{v^*, w^*\} \in E^*$.

(a) Sei $I = (G, 2)$ eine Instanz von VERTEX COVER, wobei G in Abbildung 1 gegeben ist. Geben Sie $f(I)$ an (ohne Begründung), d.h., geben Sie die aus der gegebenen Funktion f resultierende FEEDBACK VERTEX SET-Instanz an.

Abbildung 1: Der Graph G.

(b) Zeigen Sie, dass f, wenn ein bestimmter der vier Schritte weggelassen wird, eine (korrekte) Reduktion von VERTEX COVER auf FEEDBACK VERTEX SET erhält.

Geben Sie dazu an, welcher Schritt nicht ausgeführt werden soll und beweisen Sie anschließend die Korrektheit der adaptierten Reduktion f', d.h. zeigen Sie, dass für alle Instanzen (G, k) von VERTEX COVER gilt, dass (G, k) genau dann eine Ja-Instanz von VERTEX COVER ist, wenn $f'((G, k))$ eine Ja-Instanz von FEEDBACK VERTEX SET ist.

Name: .... **Matr.-Nr.:** ....

Aufgabe 5: **PCP** (5 + 3 Punkte)

Zeigen Sie, dass das Problem ALTERNATING PCP entscheidbar ist.

ALTERNATING PCP
Eingabe: Eine Liste $L = \langle (x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_k, y_k) \rangle$ von Tupeln, wobei $x_i, y_i \in \{(01)^+\} = \{01, 0101, 010101, \ldots\}$.
Frage: Gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ und eine Sequenz $i_1, i_2, \ldots, i_n$, sodass $1 \leq i_j \leq k$ und

$$x_{i_1} \cdot x_{i_2} \cdot \ldots \cdot x_{i_n} = y_{i_1} \cdot y_{i_2} \cdot \ldots \cdot y_{i_n}?$$

Zeigen Sie für die Entscheidbarkeit die folgenden Eigenschaften.

(a) Wenn die gegebene Instanz eine Ja-Instanz ist, dann gibt es
- ein Tupel (x_j, y_j) mit $x_j = y_j$ oder
- zwei Tupel $(x_g, y_g), (x_h, y_h)$ mit $|x_g| < |y_g|$ und $|x_h| > |y_h|$.

(b) Wenn es
- ein Tupel (x_j, y_j) mit $x_j = y_j$ oder
- zwei Tupel $(x_g, y_g), (x_h, y_h)$ mit $|x_g| < |y_g|$ und $|x_h| > |y_h|$

gibt, dann ist die gegebene Instanz eine Ja-Instanz.

Hinweise:
Die Länge $|x|$ eines Wortes x gibt die Anzahl der Alphabetsymbole in x an.