Name: .... **Matr.-Nr.: ....**

Multiple-Choice-Test zu Berechenbarkeit und Komplexität (B)
TU Berlin, 01.12.2022

(Weller/Froese/Kellerhals/Zschoche, Wintersemester 2022/2023)

Arbeitszeit: 45 Minuten, Gesamtpunktzahl: 25

Hinweis: Je Aufgabe ist **mindestens** eine Antwortmöglichkeit korrekt.
Wenn eine **falsche** Antwortmöglichkeit angekreuzt wurde, so gibt es **Null** Punkte für die betroffene (Teil-)Aufgabe.
Jede Aufgabe ist annotiert mit der Anzahl erreichbarer Punkte

Wir erinnern an folgende Definitionen aus der Vorlesung:

- Die Null ist eine natürliche Zahl.
- Die Komposition zweier Funktionen $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ und $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ist definiert als $f \circ g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $(f \circ g)(n) \coloneqq f(g(n))$.
- Die Ackermannfunktion ack und die modernisierte Ackermannfunktion a sind definiert durch

$$\begin{aligned} \mathrm{ack}(0, y) &:= y + 1, \\ \mathrm{ack}(x, 0) &:= \mathrm{ack}(x - 1, 1), \\ \mathrm{ack}(x, y) &:= \mathrm{ack}(x - 1, \mathrm{ack}(x, y - 1)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a(0, y) &:= 1, \\ a(1, y) &:= 3y + 1, \\ a(x, y) &:= \underbrace{a(x - 1, a(x - 1, \ldots, a(x - 1, y) \ldots)}_{y \text{ mal}} \end{aligned}$$

Aufgabe 1: **Turing-Berechenbarkeit** (2 Punkte)

Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

- ☐ Jede Turing-Maschine berechnet eine totale Funktion.
- ☐ Eine Turing-Maschine, die auf keiner Eingabe hält, berechnet keine Funktion.
- ☐ Jede Funktion, die von einer Mehrband-Turing-Maschine berechnet werden kann, kann auch von einer Einband-Turing-Maschine berechnet werden.
- ☐ Jede Turing-Maschine berechnet eine Funktion.

Aufgabe 2: **Turing-Berechenbarkeit II** (3 Punkte)

Im Folgenden sei $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ total, $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ primitiv-rekursiv und $h\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ Turing-berechenbar. Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

- ☐ Falls h total ist, dann ist $g \circ h$ total und Turing-berechenbar.
- ☐ Es ist möglich, dass $h \circ (g \circ f)$ die nirgends definierte Funktion ist.
- ☐ Die Funktion $f \circ g$ ist total, aber nie LOOP-berechenbar.
- ☐ Die Funktion $h \circ f$ kann primitiv-rekursiv sein.
- ☐ Die Funktion $g \circ f$ ist immer primitiv-rekursiv.

Aufgabe 3: **Diagonalisierung** (2 + 2 Punkte)

Sei $L = (L_0, L_1, \ldots)$ eine Liste aller 1-stelligen LOOP-berechenbaren Funktionen und sei $G = (G_0, G_1, \ldots)$ eine Liste aller 1-stelligen GOTO-berechenbaren Funktionen. Weiter seien folgende Funktionen definiert:

$$\ell(n) := L_n(n) + 1 \qquad \text{und} \qquad g(n) := \begin{cases} G_n(n) + 1, & \text{falls } G_n(n) \neq \bot \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}.$$

(a) Welche der folgenden Aussagen über L und ℓ sind korrekt?

- ☐ Die Funktion ℓ ist total.
- ☐ Die Liste L kann nicht existieren, da es zu viele LOOP-berechenbare Funktionen gibt.
- ☐ Über die Berechenbarkeit von ℓ können keine Aussagen getroffen werden.
- ☐ Die Funktion ℓ ist **nicht** LOOP-berechenbar.

(b) Welche der folgenden Aussagen über G und g sind korrekt?

- ☐ Die Funktion g ist LOOP-berechenbar.
- ☐ Die Funktion g ist total.
- ☐ Die Liste G kann nicht existieren, da es zu viele GOTO-berechenbare Funktionen gibt.
- ☐ Die Funktion g ist Turing-berechenbar.
- ☐ Über die Berechenbarkeit von g können keine Aussagen getroffen werden.
- ☐ Die Funktion g ist **nicht** GOTO-berechenbar.

Aufgabe 4: **Berechenbarkeit** (2 Punkte)

Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

- ☐ Jede GOTO-berechenbare Funktion ist auch WHILE-berechenbar.
- ☐ Jede totale Funktion ist LOOP-berechenbar.
- ☐ Sind zwei Funktionen $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ und $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ LOOP-berechenbar, so ist ihre Komposition $f \circ g$ ebenfalls LOOP-berechenbar.
- ☐ Jede Turing-berechenbare Funktion ist auch LOOP-berechenbar.
- ☐ Jede Turing-berechenbare Funktion ist auch GOTO-berechenbar.
- ☐ Jede totale Funktion ist WHILE-berechenbar.
- ☐ Jede LOOP-berechenbare Funktion ist auch Turing-berechenbar.

Aufgabe 5: **Ackermannfunktion** (2 Punkte)

Welche Aussagen über die in der Vorlesung präsentierte Ackermannfunktion $\mathrm{ack}(x, y)$ sind korrekt?

☐ Die Ackermannfunktion ist total.

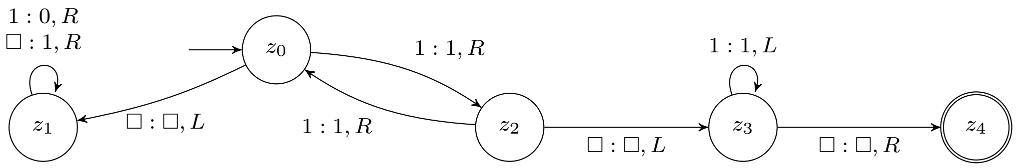
☐ Die Ackermannfunktion ist LOOP-berechenbar.

☐ Die Ackermannfunktion wächst schneller als jede totale Funktion.

☐ Die Ackermannfunktion ist Turing-berechenbar.

Aufgabe 6: **Turing-Maschinen** (2+3+3 Punkte)

Gegeben sei die Turing-Maschine $M := (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \Box, \{z_4\})$ mit $Z = \{z_i \mid 0 \leq i \leq 4\}$, $\Sigma = \{0, 1\}$, $\Gamma = \Sigma \cup \{\Box\}$ und δ beschrieben durch den folgenden Zustandsgraphen.



Hinweis zur Formulierung: ein Wort w *besteht* aus k Einsen (bzw. Nullen), wenn w die Länge k hat und kein Symbol außer 1 (bzw. 0) in w vorkommt. Ein Wort w *enthält* k Einsen (bzw. Nullen) wenn man beliebig Symbole aus w löschen kann um ein Wort zu erhalten, das aus k Einsen (bzw. Nullen) besteht. Das Wort 1101 *enthält* eine Null und *enthält* drei Einsen, aber es *besteht* nicht aus drei Einsen.

(a) Welche der folgenden Wörter werden von M akzeptiert?

☐ 111 ☐ 101 ☐ 11 ☐ 1

(b) Welche Aussagen über M sind korrekt?

☐ M akzeptiert die Sprache $\{1^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

☐ M akzeptiert keine Sprache, da M eine Funktion berechnet.

☐ M akzeptiert mindestens ein Wort, das eine 0 enthält.

☐ M akzeptiert die Sprache $\{1^n 1^n 1 \mid n \in \mathbb{N}\}$.

☐ M akzeptiert alle Wörter über Σ, die eine ungerade Anzahl Einsen enthalten.

(c) Welche Aussagen über M sind korrekt?

☐ M berechnet die Funktion $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit

$$g(n) := \begin{cases} 1, & \text{falls die Binärdarstellung von } n \text{ aus einer ungeraden Anzahl Einsen besteht} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}.$$

☐ M berechnet keine Funktion, da M eine Sprache akzeptiert.

☐ Es gibt Eingaben, auf denen M nicht hält.

☐ M berechnet die Funktion $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit

$$g(n) := \begin{cases} n, & \text{falls } n = 2 \cdot 4^q - 1 \text{ für ein } q \in \mathbb{N} \\ \perp, & \text{sonst} \end{cases}.$$

☐ M hält auf allen Eingaben, die eine 0 enthalten.

Aufgabe 7: **WHILE** (2 + 2 Punkte)

Gegeben sei das folgende WHILE-Programm, welches eine Funktion $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ berechnet (mit Eingabe x_1).

$x_0 := x_0 + 1;$
WHILE $x_1 \neq 0$ **DO**
  $x_2 := x_0 + 0;$
  WHILE $x_2 \neq 0$ **DO**
    $x_0 := x_0 + 2;$
    $x_2 := x_2 - 1$
  END;
  $x_1 := x_1 - 1$
END

(a) Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

☐ $f(2) = \perp$ ☐ $f(1) = 3$ ☐ $f(0) = 1$ ☐ $f(1) = 2$

(b) Welche Funktion wird berechnet?

☐ $f(x_1) = 2^{x_1}$

☐ $f(x_1) = 3^{x_1}$

☐ $f(x_1) = x_1^2$

☐ Keine der anderen Funktionen

☐ $f(x_1) = 2x_1$

☐ Die nirgendes definierte Funktion