

Name:

Matr.-Nr.:

Wiederholungsklausur: Berechenbarkeit und Komplexität

(Nichterlein/Froese, Wintersemester 2024/2025)

Bearbeitungszeit: 120 Minuten
Punktzahl zum Bestehen: 50 Punkte

Aufgabe Nr.:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Summe
Punktzahl:	13	12	12	15	16	8	16	18	10	120
Davon erreicht:										

Allgemeine Hinweise:

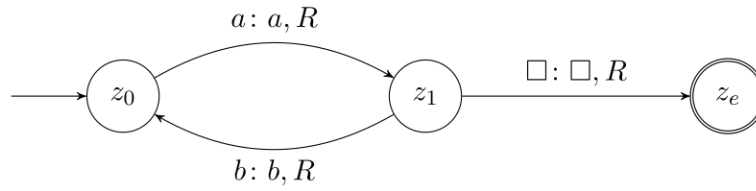
- $0 \in \mathbb{N}$
- Es sind keinerlei Hilfsmittel erlaubt.
- Benutzen Sie einen dokumentenechten Stift in der Farbe schwarz oder blau. Insbesondere also keinen Bleistift, sondern einen Kugelschreiber.
- Beschriften Sie jedes Blatt mit ihrem Vor- und Nachnamen und ihrer Matrikelnummer.
- **Falls es in der Aufgabenstellung nicht explizit ausgeschlossen wird, so sind alle Antworten zu begründen! Antworten ohne Begründung erhalten 0 Punkte.**
- Sie dürfen alle Aussagen **und Mitteilungen** aus den Vorlesungsfolien als bekannt annehmen, es sei denn der Beweis einer solchen Aussage ist explizit gefordert.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1: **Turing-Maschinen**

(13 Punkte)

Gegeben ist folgende Turing-Maschine $M = (\{z_0, z_1, z_e\}, \{a, b\}, \{a, b, \square\}, \delta, z_0, \square, \{z_e\})$, wobei δ die folgende graphische Darstellung hat:



- (a) Geben Sie die Konfigurationsfolge (beginnend mit der Startkonfiguration z_0aba) der Turing-Maschine M bei Eingabe aba an (**ohne Begründung**). (3 P)
- (b) Geben Sie eine deterministische Turing-Maschine M' mit $T(M') = \{a, b\}^* \setminus T(M)$ an (**ohne Begründung**). (10 P)

Hinweise/Definitionen: Für eine Turing-Maschine $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \square, E)$ gibt

$$T(M) = \{w \in \Sigma^* \mid \exists_{\alpha, \beta \in \Gamma^*} \exists_{z \in E} : z_0 w \vdash_M^* \alpha z \beta\}$$

die von M akzeptierte Sprache an.

Name:

Matr.-Nr.:

(Leere Seite für Notizen oder Ähnliches; bei Lösungen bitte zugehörige Aufgabe klar kennzeichnen!)

Aufgabe 2: **Rekursion**

(12 Punkte)

Wir erinnern: Der μ -**Operator** einer Funktion $g: \mathbb{N}^{k+1} \rightarrow \mathbb{N}$ ist die Funktion $\mu(g): \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$, die wie folgt definiert ist:

$$\mu(g)(x_1, \dots, x_k) := \min \{n \in \mathbb{N} \mid g(n, x_1, \dots, x_k) = 0 \wedge \forall_{0 \leq i < n} g(i, x_1, \dots, x_k) \neq \perp\}$$

Hinweis: Es gilt $\min \emptyset = \perp$.

Sei nun $g(x_1, x_2) := \max\{0, x_1 \cdot x_2 + x_2 - 4 \cdot x_1\}$. Pro Teilaufgabe ist **genau eine** Aussage zu $\mu(g)$ korrekt. Wählen Sie die korrekten Aussagen und begründen Sie Ihre Wahl!

(a) Was ist der Funktionswert von $\mu(g)$ an der Stelle 2?

(6 P)

☐ $\mu(g)(2) = 2$

☐ $\mu(g)(2) = 1$

☐ $\mu(g)(2) = \perp$

(b) Was ist der Funktionswert von $\mu(g)$ an der Stelle 4?

(6 P)

☐ $\mu(g)(4) = 2$

☐ $\mu(g)(4) = 1$

☐ $\mu(g)(4) = \perp$

Name:

Matr.-Nr.:

(Leere Seite für Notizen oder Ähnliches; bei Lösungen bitte zugehörige Aufgabe klar kennzeichnen!)

Aufgabe 3: **Diagonalisierung**

(12 Punkte)

Beweisen Sie mittels Diagonalisierung, dass es Sprachen über dem Alphabet $\{0, 1\}$ gibt, die nicht co-semi-entscheidbar sind.

Hinweis: Ihr Beweis darf **außer** den unten auf dieser Seite genannten Fakten **keine** Sätze aus der Vorlesung nutzen. Insbesondere dürfen Sie in dieser Aufgabe **nicht** annehmen, dass das Halteproblem H nicht co-semi-entscheidbar ist.

Hinweise/Definitionen: Eine Sprache $A \subseteq \Sigma^*$ heißt **entscheidbar**, falls die charakteristische Funktion $\chi_A : \Sigma^* \rightarrow \{0, 1\}$ berechenbar ist. Eine Sprache $A \subseteq \Sigma^*$ heißt **semi-entscheidbar**, falls die halbe charakteristische Funktion $\chi'_A : \Sigma^* \rightarrow \{0, 1\}$ berechenbar ist.

$$\chi_A(x) := \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in A, \\ 0, & \text{falls } x \notin A. \end{cases} \quad \chi'_A(x) := \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in A, \\ \perp, & \text{falls } x \notin A. \end{cases}$$

Eine Sprache $A \subseteq \Sigma^*$ heißt **co-semi-entscheidbar**, falls ihr Komplement $\overline{A} = \Sigma^* \setminus A$ semi-entscheidbar ist.

Es gibt abzählbar unendlich viele Turing-Maschinen.

Name:

Matr.-Nr.:

(Leere Seite für Notizen oder Ähnliches; bei Lösungen bitte zugehörige Aufgabe klar kennzeichnen!)

Aufgabe 4: **Reduktion**

(15 Punkte)

Reduzieren Sie die Sprache $A_0 := \{w \in \{0, 1\}^* \mid \varepsilon \in T(M_w)\} \subseteq \{0, 1\}^*$ auf das Halteproblem auf leerem Band $H_0 := \{w \in \{0, 1\}^* \mid M_w \text{ hält auf } \varepsilon\} \subseteq \{0, 1\}^*$.

Hinweise/Definitionen: Eine Sprache $A \subseteq \Sigma^*$ heißt **reduzierbar auf** eine Sprache $B \subseteq \Pi^*$ (**in Zeichen** $A \leq B$), wenn es eine totale, berechenbare Funktion $f: \Sigma^* \rightarrow \Pi^*$ gibt, sodass für alle $x \in \Sigma^*$ gilt:

$$x \in A \iff f(x) \in B.$$

Wir nennen f eine **Reduktion** von A auf B .

Name:

Matr.-Nr.:

(Leere Seite für Notizen oder Ähnliches; bei Lösungen bitte zugehörige Aufgabe klar kennzeichnen!)

Aufgabe 5: **Satz von Rice**

(16 Punkte)

- (a) Was besagt der Satz von Rice? Füllen Sie die Lücken aus.

(4 P)

Sei $\mathcal{R}$ die Menge aller Funktionen. Sei $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{R}$ eine nicht-triviale Teilmenge von $\mathcal{R}$, d. h. und . Dann ist

$\mathcal{C}(\mathcal{S}) :=$

unentscheidbar.

- (b) Der Beweis des Satzes von Rice besteht aus zwei Fällen. Der erste Fall ist der Folgende:

(12 P)

1. Fall: Die nirgends definierte Funktion Ω ist nicht in $\mathcal{S}$. Wir zeigen $H_0 \leq \mathcal{C}(\mathcal{S})$.

Da $\mathcal{S} \neq \emptyset$, existiert eine Turing-Maschine Q , die eine Funktion $q \in \mathcal{S}$ berechnet. Wir definieren die Reduktion $f: \{0, 1\}^* \rightarrow \{0, 1\}^*$ vermöge $f(w) := w'$, wobei w' die Kodierung einer Turing-Maschine $M_{w'}$ ist, die bei Eingabe x zunächst M_w auf leerem Band simuliert und, falls M_w hält, dann Q auf Eingabe x simuliert. Diese Funktion f ist total und berechenbar und es gilt, dass die Turing-Maschine $M_{w'}$ die Funktion $q \in \mathcal{S}$ berechnet, falls $w \in H_0$. Andernfalls berechnet $M_{w'}$ die Funktion $\Omega \notin \mathcal{S}$. Es gilt somit

$$w \in H_0 \iff M_w \text{ hält auf leerem Band} \iff M_{w'} \text{ berechnet } q \iff f(w) \in \mathcal{C}(\mathcal{S}).$$

Vervollständigen Sie den Beweis, indem Sie den zweiten Fall behandeln. Dieser beginnt mit:

2. Fall: Die nirgends definierte Funktion Ω ist in $\mathcal{S}$. Wir zeigen $\overline{H_0} \leq \mathcal{C}(\mathcal{S})$.

Hinweise/Definitionen: Eine Sprache $A \subseteq \Sigma^*$ heißt **reduzierbar auf** eine Sprache $B \subseteq \Pi^*$ (**in Zeichen** $A \leq B$), wenn es eine totale, berechenbare Funktion $f: \Sigma^* \rightarrow \Pi^*$ gibt, sodass für alle $x \in \Sigma^*$ gilt:

$$x \in A \iff f(x) \in B.$$

Wir nennen f eine **Reduktion** von A auf B .

Name:

Matr.-Nr.:

(Leere Seite für Notizen oder Ähnliches; bei Lösungen bitte zugehörige Aufgabe klar kennzeichnen!)

Aufgabe 6: **Postsches Korrespondenzproblem**

(8 Punkte)

Hat die folgende PCP Instanz eine Lösung?

$(1, 0), (0, 000), (100, 10)$

Name:

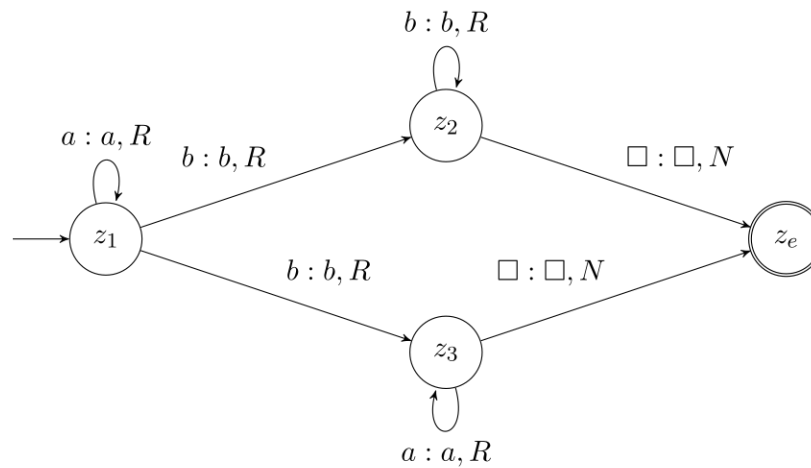
Matr.-Nr.:

(Leere Seite für Notizen oder Ähnliches; bei Lösungen bitte zugehörige Aufgabe klar kennzeichnen!)

Aufgabe 7: **NTM und coNTM**

(16 Punkte)

Betrachten Sie die Turing-Maschine $M = (\{z_1, z_2, z_3, z_e\}, \{a, b\}, \{a, b, \square\}, \delta, z_1, \square, \{z_e\})$, wobei δ die folgende graphische Darstellung hat:



Beantworten Sie folgende Fragen (**alle ohne Begründung**).

- (a) Sei L_N die Sprache, die M akzeptiert, wenn M nichtdeterministisch arbeitet. (4 P)
 1. Geben Sie ein Wort der Länge 4 aus $\{a, b\}^*$ an, welches in L_N ist.
 2. Geben Sie ein Wort der Länge 4 aus $\{a, b\}^*$ an, welches **nicht** in L_N ist.
- (b) Sei L_{coN} die Sprache, die M akzeptiert, wenn M co-nichtdeterministisch arbeitet. (4 P)
 1. Geben Sie ein Wort der Länge 4 aus $\{a, b\}^*$ an, welches in L_{coN} ist.
 2. Geben Sie ein Wort der Länge 4 aus $\{a, b\}^*$ an, welches **nicht** in L_{coN} ist.
- (c) Geben Sie die Sprachen L_N und L_{coN} an. (8 P)

Hinweise/Definitionen: Eine NTM akzeptiert, wenn es **mindestens einen** Berechnungspfad von der Startkonfiguration zu einer akzeptierenden Konfiguration gibt. Eine coNTM akzeptiert, wenn **alle** Berechnungspfade von der Startkonfiguration zu akzeptierenden Konfigurationen führen.

Name:

Matr.-Nr.:

(Leere Seite für Notizen oder Ähnliches; bei Lösungen bitte zugehörige Aufgabe klar kennzeichnen!)

Aufgabe 8: **Polynomzeitreduktion**

(18 Punkte)

Betrachten Sie die beiden folgenden Probleme auf *ungerichteten* Graphen:

INDEPENDENT SET

Eingabe: Ein Graph $G = (V, E)$ und $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$.

Frage: Gibt es ein Independent Set $S \subseteq V$ der Größe k in G , d. h., gibt es k Knoten, die paarweise nicht benachbart sind?

MULTICOLORED INDEPENDENT SET

Eingabe: Ein Graph $G = (V, E)$, $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$, und eine Knotenfärbung $c: V \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$.

Frage: Gibt es ein Independent Set $S \subseteq V$ der Größe k in G , sodass für alle $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ ein $v \in S$ mit $c(v) = i$ existiert?

Hinweis: Intuitiv ist MULTICOLORED INDEPENDENT SET die Aufgabe, ein Independent Set S der Größe k zu finden, wobei es für jede „Farbe“ $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ *genau* einen Knoten mit Farbe i in S geben muss.

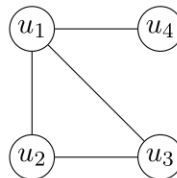
Gegeben ist folgende Reduktion von INDEPENDENT SET auf MULTICOLORED INDEPENDENT SET.

Reduktion: Sei der Graph $G = (V, E)$ und $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$ eine Eingabe für INDEPENDENT SET. Wir konstruieren einen Graph $G' = (V', E')$ zusammen mit einer Färbung $c: V' \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ in drei Schritten:

1. Für jeden Knoten $v \in V$ füge k Knoten $v^1, v^2, \dots, v^k$ in G' ein. Setze $c(v^i) := i$ für alle $i \in \{1, 2, \dots, k\}$.
2. Verbinde für jede Kante $\{u, v\} \in E$ und für alle $i, j \in \{1, \dots, k\}$ die Knoten v^i und u^j in G' durch eine Kante.
3. Verbinde für alle $1 \leq i < j \leq k$ und Knoten $v \in V$ die Knoten v^i und v^j mit einer Kante.

Wir definieren nun die Polynomzeitreduktion f durch $f(\langle(G, k)\rangle) := \langle(G', k, c)\rangle$.

- (a) Zeichnen Sie den Graph G' , welcher durch obige Reduktion für folgenden Graph G und $k = 2$ konstruiert wird (**ohne Begründung**). (4 P)



- (b) Überprüfen Sie die obige Polynomzeitreduktion auf Korrektheit und korrigieren Sie diese gegebenenfalls. Beweisen Sie anschließend die Korrektheit der (eventuell korrigierten) Polynomzeitreduktion, d. h., zeigen Sie (14 P)

$$\forall(G, k): \langle(G, k)\rangle \in \text{INDEPENDENT SET} \iff f(\langle(G, k)\rangle) \in \text{MULTICOLORED INDEPENDENT SET}.$$

Name:

Matr.-Nr.:

(Leere Seite für Notizen oder Ähnliches; bei Lösungen bitte zugehörige Aufgabe klar kennzeichnen!)

Aufgabe 9: **Diverses zu NP**

(10 Punkte)

Zeigen oder widerlegen Sie die beiden folgenden Aussagen.

- (a) Sei $A \in \text{NP}$ und sei $B \subseteq A$. Dann gilt $B \in \text{NP}$. (5 P)
- (b) Sei A NP-schwer und $B \subseteq A$. Dann ist B NP-schwer. (5 P)

Hinweise/Definitionen: Eine Sprache $A \subseteq \Sigma^*$ heißt...

- a) ... **NP-schwer**, falls $\forall_{L \in \text{NP}} L \leq_m^p A$.
- b) ... **NP-vollständig**, wenn A NP-schwer ist und $A \in \text{NP}$ gilt.

Name:

Matr.-Nr.:

(Leere Seite für Notizen oder Ähnliches; bei Lösungen bitte zugehörige Aufgabe klar kennzeichnen!)