

Name:

Matr.-Nr.:

Klausur: Berechenbarkeit und Komplexität

(Nichterlein/Froese, Wintersemester 2024/2025)

Bearbeitungszeit: 120 Minuten
Punktzahl zum Bestehen: 50 Punkte

Aufgabe Nr.:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Summe
Punktzahl:	13	18	12	15	10	8	16	18	10	120
Davon erreicht:										

Allgemeine Hinweise:

- Es sind keinerlei Hilfsmittel erlaubt.
- Benutzen Sie einen dokumentenechten Stift in der Farbe schwarz oder blau. Insbesondere also keinen Bleistift, sondern einen Kugelschreiber.
- Beschriften Sie jedes Blatt mit ihrem Vor- und Nachnamen und ihrer Matrikelnummer.
- **Falls es in der Aufgabenstellung nicht explizit ausgeschlossen wird, so sind alle Antworten zu begründen! Antworten ohne Begründung erhalten 0 Punkte.**
- Sie dürfen alle Aussagen **und Mitteilungen** aus den Vorlesungsfolien als bekannt annehmen, es sei denn der Beweis einer solchen Aussage ist explizit gefordert.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1: **Turing-Maschinen**

(13 Punkte)

Geben Sie eine deterministische Turing-Maschine an, die die **charakteristische Funktion** χ_A der Sprache $A = \{a^{2n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ über dem Alphabet $\{a\}$ berechnet. Als Begründung reicht eine informelle Erläuterung der Funktionsweise Ihrer Turing-Maschine aus.

Hinweise/Definitionen: Die charakteristische Funktion $\chi_L: \Sigma^* \rightarrow \{0, 1\}$ einer Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ ist definiert als

$$\chi_L(x) := \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in L, \\ 0, & \text{falls } x \notin L. \end{cases}$$

Eine deterministische Turing-Maschine $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \square, E)$ berechnet die charakteristische Funktion χ_L , falls für alle $x \in \Sigma^*$ und $y \in \{0, 1\}$ gilt:

$$\chi_L(x) = y \iff \exists_{z \in E} z_0 x \vdash_M^* zy.$$

Name:

Matr.-Nr.:

(Leere Seite für Notizen oder Ähnliches; bei Lösungen bitte zugehörige Aufgabe klar kennzeichnen!)

Aufgabe 2: GOTO-Programme

(18 Punkte)

Betrachten Sie folgendes GOTO-Programm P : Die „Eingabe“ ist in x_1 gespeichert, die „Ausgabe“ steht am Ende in x_0 und für alle $i \in \{0, 2, 3, 4, \dots\}$ ist in der Variable x_i initial 0 gespeichert. Der Befehl „HALT;“ in Sprungmarke M_3 gibt das Ende des GOTO-Programmes an. Sei f_P die vom GOTO-Programm P berechnete Funktion.

```

IF  $x_1 = 0$  THEN GOTO  $M_3$ ;
 $x_0 := x_0 + 1$ ;
 $M_1 : x_0 := x_0 + x_2$ ;
 $x_1 := x_1 - 1$ ;
IF  $x_1 = 0$  THEN GOTO  $M_3$ ;
 $x_2 := x_2 + x_0$ ;
 $x_1 := x_1 - 1$ ;
IF  $x_1 = 0$  THEN GOTO  $M_2$ ;
IF  $x_3 = 0$  THEN GOTO  $M_1$ ;
 $M_2 : x_0 := x_2 + 0$ ;
 $M_3 : \text{HALT};$ 

```

(a) Welche der folgenden Aussagen sind korrekt? (ohne Begründung)

(4 P)

☐ $f_P(1) = 1$ ☐ $f_P(2) = 2$ ☐ $f_P(1) = \perp$ ☐ $f_P(2) = 1$

(b) Was ist die durch das GOTO-Programm P berechnete Funktion f_P ? (ohne Begründung)

(4 P)

- ☐ P berechnet die x_1 -te Fibonacci-Zahl F_{x_1} , wobei $F_0 := 0$, $F_1 := 1$ und $F_i := F_{i-1} + F_{i-2}$ für $i \geq 2$.
- ☐ P berechnet $f_P(x_1) = 2^{x_1}$.
- ☐ P berechnet $f_P(x_1) = \binom{x_1+2}{2}$.
- ☐ P berechnet $f_P(x_1) = x_1^2$.

(c) Geben Sie ein LOOP-Programm an, das die Funktion f_P berechnet (ohne Begründung).

(10 P)

Hinweise/Definitionen: Die Eingabe des LOOP-Programms steht zu Beginn in x_1 . Die Ausgabe steht am Ende der Berechnung in x_0 . Wir erlauben folgende Syntax für LOOP-Programme:

- Addition: $x_i := x_j + c$ sowie $x_i := x_j + x_\ell$ (x_i, x_j, x_ℓ Variablen, $c \in \mathbb{N}$)
- Modifizierte Subtraktion: $x_i := x_j - c$ sowie $x_i := x_j - x_\ell$ (x_i, x_j, x_ℓ Variablen, $c \in \mathbb{N}$)
- Zuweisung: $x_i := x_j$ (x_i, x_j Variablen)
- Sequenz: $P_1; P_2$ (P_1, P_2 LOOP-Programme)
- LOOP-Schleife: **LOOP** x_i **DO** P **END** (x_i Variable, P LOOP Programm)
- Bedinge Anweisungen:
 - **IF** $x_i = c$ **THEN** P_1 **ELSE** P_2 **END** (x_i Variable, $c \in \mathbb{N}$, P_1, P_2 LOOP Programme)
 - **IF** $x_i \leq c$ **THEN** P_1 **ELSE** P_2 **END** (x_i Variable, $c \in \mathbb{N}$, P_1, P_2 LOOP Programme)

Name:

Matr.-Nr.:

(Leere Seite für Notizen oder Ähnliches; bei Lösungen bitte zugehörige Aufgabe klar kennzeichnen!)

Aufgabe 3: **(Semi-)Entscheidbarkeit**

(12 Punkte)

Gegeben sind folgende drei Sprachen.

$$L_1 = \{w \in \{0, 1\}^* \mid T(M_w) = H\}$$

$$L_2 = \{w \in \{0, 1\}^* \mid 110 \in T(M_w)\}$$

$$L_3 = \{w \in \{0, 1\}^* \mid T(M_w) = \overline{H}\}$$

(a) Zwei dieser Sprachen sind semi-entscheidbar. Welche? (ohne Begründung) (6 P)

(b) Zeigen Sie, dass eine Ihrer ausgewählten Sprachen entscheidbar ist. (6 P)

Hinweise/Definitionen: Eine Sprache $A \subseteq \Sigma^*$ heißt **entscheidbar**, falls die charakteristische Funktion $\chi_A : \Sigma^* \rightarrow \{0, 1\}$ berechenbar ist. Eine Sprache $A \subseteq \Sigma^*$ heißt **semi-entscheidbar**, falls die halbe charakteristische Funktion $\chi'_A : \Sigma^* \rightarrow \{0, 1\}$ berechenbar ist.

$$\chi_A(x) := \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in A, \\ 0, & \text{falls } x \notin A. \end{cases} \quad \chi'_A(x) := \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in A, \\ \perp, & \text{falls } x \notin A. \end{cases}$$

Das **allgemeine Halteproblem** ist die Menge $H := \{w\#x \mid M_w \text{ hält auf Eingabe } x\}$ und $\overline{H}$ ist die Komplementsprache von H . Das allgemeine Halteproblem H ist semi-entscheidbar aber nicht entscheidbar.

Name:

Matr.-Nr.:

(Leere Seite für Notizen oder Ähnliches; bei Lösungen bitte zugehörige Aufgabe klar kennzeichnen!)

Aufgabe 4: **Reduktion**

(15 Punkte)

Reduzieren Sie die unten definierte Sprache H_{AKT} auf das allgemeine Halteproblem H .

$$H = \{w\#x \mid M_w \text{ hält auf Eingabe } x\}$$
$$H_{\text{AKT}} = \{w \in \{0,1\}^* \mid M_w \text{ hält auf Eingabe } AKT\}$$

Hinweise/Definitionen: Eine Sprache $A \subseteq \Sigma^*$ heißt **reduzierbar auf** eine Sprache $B \subseteq \Pi^*$ (**in Zeichen** $A \leq B$), wenn es eine totale, berechenbare Funktion $f: \Sigma^* \rightarrow \Pi^*$ gibt, sodass für alle $x \in \Sigma^*$ gilt:

$$x \in A \iff f(x) \in B.$$

Wir nennen f eine **Reduktion** von A auf B .

Name:

Matr.-Nr.:

(Leere Seite für Notizen oder Ähnliches; bei Lösungen bitte zugehörige Aufgabe klar kennzeichnen!)

Aufgabe 5: **Reduktionseigenschaften**

(10 Punkte)

Seien $A, B \subseteq \Sigma^*$ Sprachen über einem Alphabet Σ und seien $\overline{A} := \Sigma^* \setminus A$ und $\overline{B} := \Sigma^* \setminus B$.

Zeigen Sie: $A \leq B \iff \overline{A} \leq \overline{B}$.

Hinweise/Definitionen: Eine Sprache $A \subseteq \Sigma^*$ heißt **reduzierbar auf** eine Sprache $B \subseteq \Pi^*$ (**in Zeichen** $A \leq B$), wenn es eine totale, berechenbare Funktion $f: \Sigma^* \rightarrow \Pi^*$ gibt, sodass für alle $x \in \Sigma^*$ gilt:

$$x \in A \iff f(x) \in B.$$

Wir nennen f eine **Reduktion** von A auf B .

Name:

Matr.-Nr.:

(Leere Seite für Notizen oder Ähnliches; bei Lösungen bitte zugehörige Aufgabe klar kennzeichnen!)

Aufgabe 6: **Postsches Korrespondenzproblem**

(8 Punkte)

Hat die folgende PCP Instanz eine Lösung?

$(abc, c), (c, b), (a, abc), (a, ab), (b, a)$

Name:

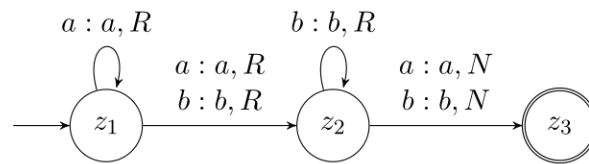
Matr.-Nr.:

(Leere Seite für Notizen oder Ähnliches; bei Lösungen bitte zugehörige Aufgabe klar kennzeichnen!)

Aufgabe 7: **NTM und coNTM**

(16 Punkte)

Betrachten Sie die Turing-Maschine $M = (\{z_1, z_2, z_3\}, \{a, b\}, \{a, b, \square\}, \delta, z_1, \square, \{z_3\})$, wobei δ die folgende graphische Darstellung hat:



Beantworten Sie folgende Fragen (**alle ohne Begründung**).

- (a) Sei L_N die Sprache, die M akzeptiert, wenn M nichtdeterministisch arbeitet. (4 P)
 - 1. Geben Sie ein Wort der Länge 5 an, welches in L_N ist.
 - 2. Geben Sie ein Wort an, welches **nicht** in L_N ist.
- (b) Sei L_{coN} die Sprache, die M akzeptiert, wenn M co-nichtdeterministisch arbeitet. (4 P)
 - 1. Geben Sie ein Wort der Länge 5 an, welches in L_{coN} ist.
 - 2. Geben Sie ein Wort an, welches **nicht** in L_{coN} ist.
- (c) Geben Sie die Sprachen L_N und L_{coN} an. (8 P)

Hinweise/Definitionen: Eine NTM akzeptiert, wenn es **mindestens einen** Berechnungspfad von der Startkonfiguration zu einer akzeptierenden Konfiguration gibt. Eine coNTM akzeptiert, wenn **alle** Berechnungspfade von der Startkonfiguration zu akzeptierenden Konfigurationen führen.

Name:

Matr.-Nr.:

(Leere Seite für Notizen oder Ähnliches; bei Lösungen bitte zugehörige Aufgabe klar kennzeichnen!)

Aufgabe 8: **Polynomzeitreduktion**

(18 Punkte)

Wir erinnern an das Problem DOMINATING SET:

DOMINATING SET

Eingabe: Ein Graph $G = (V, E)$ und $k \in \mathbb{N}$.

Frage: Gibt es eine Knotenmenge $V' \subseteq V$ mit $|V'| \leq k$, sodass jeder Knoten in $V \setminus V'$ mindestens einen Nachbarn in V' hat?

Aus der Vorlesung ist bekannt, dass SET COVER NP-vollständig ist. Zur Erinnerung:

SET COVER

Eingabe: Eine Grundmenge U , eine Familie $\mathcal{F} = \{S_1, \dots, S_m\}$ von Teilmengen $S_i \subseteq U$, $1 \leq i \leq m$, und $k \in \mathbb{N}$.

Frage: Gibt es eine Teilmenge $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{F}$ mit $|\mathcal{Z}| \leq k$, sodass $\bigcup_{S \in \mathcal{Z}} S = U$ gilt?

Betrachten Sie folgende Reduktion von SET COVER auf DOMINATING SET.

Reduktion: Sei $(U, \mathcal{F}, k)$ eine Instanz für SET COVER. Wir konstruieren einen bipartiten Graph $G = (V_1 \cup V_2, E)$ wie folgt:

1. Füge in V_1 einen Knoten v_S für jedes Set $S \in \mathcal{F}$ ein.
2. Füge in V_2 einen Knoten v_u für jedes Element $u \in U$ ein.
3. Für jedes Set $S \in \mathcal{F}$ und jedes Element $u \in U$ mit $u \in S$, füge die Kante $\{v_S, v_u\}$ zu G hinzu.
4. Füge einen Knoten z_1 zu V_1 hinzu und auch einen Knoten z_2 zu V_2 . Füge die Kante $\{z_1, z_2\}$ hinzu und auch die Kante $\{v_S, z_2\}$ für alle $S \in \mathcal{F}$.

Wir definieren nun die Polynomzeitreduktion f durch $f(\langle(U, \mathcal{F}, k)\rangle) := \langle(G, k+1)\rangle$.

- (a) Geben Sie den Graph G an, welcher durch obige Reduktion für die folgende Instanz von Set Cover konstruiert wird. (ohne Begründung) (4 P)

$$\begin{aligned} U &= \{1, 2, 3, 4\} & \mathcal{F} &= \{S_1, S_2, S_3, S_4\} \\ S_1 &= \{1, 3\}, & S_2 &= \{2, 3\}, & S_3 &= \{2, 4\}, & S_4 &= \{3, 4\} \end{aligned}$$

- (b) Überprüfen Sie die obige Reduktion f auf Korrektheit und korrigieren Sie diese gegebenenfalls. (14 P)
Beweisen Sie anschließend die Korrektheit der (eventuell korrigierten) Reduktion, d. h. zeigen Sie

$$\forall(U, \mathcal{F}, k) : \langle(U, \mathcal{F}, k)\rangle \in \text{SET COVER} \iff f(\langle(U, \mathcal{F}, k)\rangle) \in \text{DOMINATING SET}.$$

Name:

Matr.-Nr.:

(Leere Seite für Notizen oder Ähnliches; bei Lösungen bitte zugehörige Aufgabe klar kennzeichnen!)

Aufgabe 9: **NP-vollständige Sprachen**

(10 Punkte)

Beweisen Sie folgenden Satz aus der Vorlesung:

Satz 1. *Für jede NP-vollständige Sprache A gilt: $A \in P \iff P = NP$.*

Hinweise/Definitionen: Eine Sprache $A \subseteq \Sigma^*$ heißt...

- a) ... **NP-schwer**, falls $\forall L \in \text{NP } L \leq_m^p A$.
- b) ... **NP-vollständig**, wenn A NP-schwer ist und $A \in \text{NP}$ gilt.

Name:

Matr.-Nr.:

(Leere Seite für Notizen oder Ähnliches; bei Lösungen bitte zugehörige Aufgabe klar kennzeichnen!)