Berechenbarkeit und Komplexität WiSe 2024/25
Gedächtnisprotokoll zur Klausur

Aufgabe 1

Geben Sie eine Turingmaschine an, die die **charakteristische** Funktion der Sprache $A = \{a^{2n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ berechnet.
Als Begründung reicht eine informelle Erklärung der Funktionsweise der Turingmaschine aus.

Aufgabe 2

Gegeben sei folgendes GOTO-Programm P:

$$
\begin{array}{l}
\quad \textbf{IF } x_1 = 0 \textbf{ THEN GOTO } M_3; \\
\quad x_0 := x_0 + 1; \\
M_1 : \\
\quad x_0 := x_0 + x_2; \\
\quad x_1 := x_1 - 1; \\
\quad \textbf{IF } x_1 = 0 \textbf{ THEN GOTO } M_3; \\
\quad x_2 := x_2 + x_0; \\
\quad x_1 := x_1 - 1; \\
\quad \textbf{IF } x_1 = 0 \textbf{ THEN GOTO } M_2; \\
\quad \textbf{IF } x_3 = 0 \textbf{ THEN GOTO } M_1; \\
M_2 : \\
\quad x_0 := x_2 + 0; \\
M_3 : \\
\quad \textbf{HALT};
\end{array}
$$

Dabei steht “-” für die modifizierte Subtraktion.
Sei f_P die Funktion, die von P berechnet wird.

1. Kreuzen Sie an:
   - ☐ f_P berechnet 2^{x_1}
   - ☐ f_P berechnet $\binom{x_1 + 2}{2}$.
   - ☐ f_P berechnet x_1^2
   - ☐ f_P berechnet die i-te Fibonacci-Zahl F_i, wobei $F_0 = 0, F_1 = 1$ und $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$.
2. Geben Sie ein LOOP-Programm an, das f_P berechnet.

Aufgabe 3

Gegeben seien die folgenden Sprachen:

$$L_1 = \{w \mid T(M_w) = H\}$$
$$L_2 = \{w \mid 110 \in T(M_w)\}$$
$$L_3 = \{w \mid T(M_w) = \overline{H}\}$$

1. Geben Sie an, welche zwei dieser Sprachen semi-entscheidbar sind (ohne Begründung).
2. Zeigen Sie, dass eine dieser Sprachen entscheidbar ist.

Aufgabe 4

Reduzieren Sie die Sprache H_{AKT} auf das allgemeine Halteproblem H.

$$H = \{w\#x \mid M_w \text{ hält auf } x\}$$
$$H_{AKT} = \{w \mid M_w \text{ hält auf Eingabe AKT}\}$$

Aufgabe 5

Seien A und B zwei Sprachen über dem Alphabet Σ mit $\overline{A} = \Sigma^* \setminus A$ und $\overline{B} = \Sigma^* \setminus B$.
Beweisen Sie:

$$A \leq B \Leftrightarrow \overline{A} \leq \overline{B}$$

Aufgabe 6

Hat das folgende PCP eine Lösung?

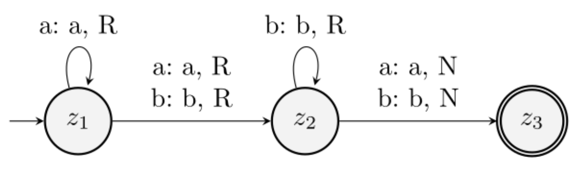
$$(abc, c), (c, b), (a, abc), (a, ab), (b, a)$$

Aufgabe 7

Gegeben sei die Turingmaschine:

$$M = (Z = \{z_1, z_2, z_3\}, \Sigma = \{a, b\}, \Gamma = \{a, b, \Box\}, \delta, z_0, \Box, E = \{z_3\})$$

Die Überführungsfunktion δ hat folgende graphische Darstellung:



1. Sei L_N die Sprache, die von der Turingmaschine berechnet wird, wenn sie eine NTM ist.
   (a) Geben Sie ein Wort der Länge 5 an, das in L_N ist. (ohne Begründung).
   (b) Geben Sie ein Wort an, das **nicht** in L_N ist.
2. Sei L_{coN} die Sprache, die von de Turingmaschine berechnet wird, wenn sie eine co-NTM ist.
   (a) Geben Sie ein Wort der Länge 5 an, das in L_{coN} ist. (ohne Begründung).
   (b) Geben Sie ein Wort an, das **nicht** in L_{coN} ist.
3. Geben sie die Sprachen L_N und L_{coN} an.

Aufgabe 8

Betrachten Sie die aus der Vorlesung bekannten NP-vollständigen Probleme Dominating Set und Set Cover:

Dominating Set

Eingabe: Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ und eine natürliche Zahl $k \in \mathbb{N}$.
Frage: Existiert eine Teilmenge $W \subseteq V$, sodass $|W| \leq k$ und jeder Knoten in $V \setminus W$ mindestens einen Nachbarn in W hat?

Set Cover

Eingabe: Eine Grundmenge U, eine Familie $\mathcal{F} = \{S_1, ..., S_m\}$, wobei jedes S_i eine Teilmenge von U ist, und eine natürliche Zahl $k \in \mathbb{N}$.
Frage: Existiert eine Teilfamilie $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$, sodass $|\mathcal{F}'| \leq k$ und die Vereinigung der enthaltenen Mengen die Grundmenge ergibt, also $\bigcup_{S \in \mathcal{F}'} S = U$?

Betrachten Sie folgende Polynomzeitkonstruktion $f((U, \mathcal{F}, k)) = (G = (V_1 \cup V_2, E), k + 1)$.

- Füge für jeden Menge $S \in \mathcal{F}$ einen Knoten v_S in V_1 hinzu.
- Füge für jedes Element $u \in U$ einen Knoten v_u in V_2 hinzu.
- Verbinde jeden Knoten v_S jeweils mit den Knoten v_u entsprechend der Grundmengenelemente u aus der Menge S mit einer Kante.
- Füge zwei neue Kanten z_1 und z_2 zu jeweils V_1 und V_2 hinzu und verbinde beide mit einer Kante.
- Verbinde z_2 mit jedem Knoten v_S.

1. Seien $U = \{1, 2, 3, 4\}$ und $\mathcal{F} = \{S_1, S_2, S_3, S_4\}$ mit $S_1 = \{1, 3\}$, $S_2 = \{2, 3\}$, $S_3 = \{2, 4\}$, $S_4 = \{3, 4\}$.
   Führen Sie die Polynomkonstruktion aus, geben Sie den resultieren Graphen an. (ohne Begründung)
2. Überprüfen Sie, ob f eine korrekte Polynomzeitreduktion von Set Cover auf Dominating Set ist und korrigieren Sie f gegebenenfalls. Beweisen Sie dann die Korrektheit der ggf. korrigierten Polynomzeitkonstruktion sowie
$$(U, \mathcal{F}, k) \in \textsc{Set Cover} \Leftrightarrow f((U, \mathcal{F}, k)) \in \textsc{Dominating Set}$$

Aufgabe 9

Beweisen Sie, dass für jede NP-vollständige Sprache A gilt:

$$A \in P \Leftrightarrow P = NP$$