

Name: .....

Matr.-Nr.: .....

**Wiederholungsklausur: Berechenbarkeit und Komplexität**  
(Niedermeier/Froese/Molter, Sommersemester 2017)

Einlesezeit: 15 Minuten  
Bearbeitungszeit: 60 Minuten  
Max. Punktezahl: 50 Punkte

<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b><math>\Sigma</math></b>
(10)	(8)	(8)	(12)	(12)	(50)

**Allgemeine Hinweise:**

- Es sind keinerlei Hilfsmittel erlaubt.
- Benutzen Sie einen dokumentenechten Stift in der Farbe schwarz oder blau. Insbesondere also keinen Bleistift, sondern einen Kugelschreiber.
- Beschriften Sie jedes Blatt mit ihrem Vor- und Nachnamen und ihrer Matrikelnummer.
- **Falls es in der Aufgabenstellung nicht explizit ausgeschlossen wird, so sind alle Antworten zu begründen! Antworten ohne Begründung erhalten 0 Punkte.**

Viel Erfolg!

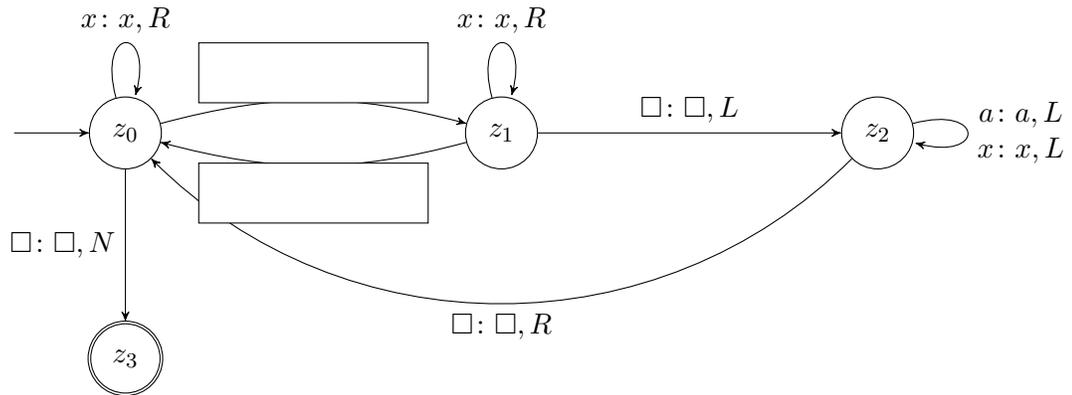
Aufgabe 1: Turing-Maschinen

(5 + 5 Punkte)

(a) Vervollständigen Sie die Übergangsfunktion  $\delta$  der folgenden Turing-Maschine

$$M_1 = (\{z_0, z_1, z_2, z_3\}, \{a\}, \{a, x, \square\}, \delta, z_0, \square, \{z_3\}),$$

sodass  $T(M_1) = \{a^{2^n} \mid n \geq 0\}$ , wobei  $\delta$  die folgende graphische Darstellung hat:



Name: .....

Matr.-Nr.: .....

*Aufgabe 2:* **Die Komplexitätsklassen P und NP**

(4 + 4 Punkte)

Im Folgenden sei  $\Sigma$  ein endliches Alphabet.

Begründen oder widerlegen Sie jeweils die beiden folgenden Aussagen.

- (a) Seien  $A$  und  $B$  mit  $B \subseteq A \subseteq \Sigma^*$  zwei Sprachen. Falls  $A$  in P liegt, so liegt auch  $B$  in P.
- (b) Für jede Sprache  $A \subseteq \Sigma^*$  aus NP und für jede Sprache  $B \subseteq \Sigma^*$  aus P gilt, falls  $A \cap B$  und  $A \cap (\Sigma^* \setminus B)$  in P liegen, so liegt  $A$  in P.

Name: .....

Matr.-Nr.: .....

**Aufgabe 3: Graphbibliotheken**

(2 + 6 Punkte)

Betrachten Sie die beiden folgenden Graphprobleme.

**DOMINATING SET**

**Eingabe:** Ein ungerichteter Graph  $G$  und eine Zahl  $k > 0$ .

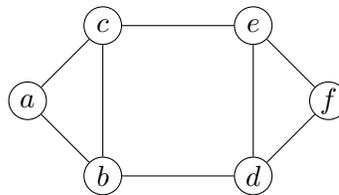
**Frage:** Gibt es  $k$  Knoten in  $G$ , sodass jeder andere Knoten mindestens einen dieser  $k$  Knoten als Nachbarn hat?

**VERTEX COVER**

**Eingabe:** Ein ungerichteter Graph  $G$  und eine Zahl  $k > 0$ .

**Frage:** Gibt es  $k$  Knoten in  $G$ , sodass jede Kante mindestens einen dieser Knoten als Endpunkt hat?

- (a) Geben Sie ein kleinstmögliches Dominating Set und ein kleinstmögliches Vertex Cover für den abgebildeten Graphen an (ohne Begründung).



- (b) Nehmen Sie an, dass ein Polynomzeitalgorithmus  $\mathcal{A}$  existiert, der DOMINATING SET entscheidet. Geben Sie einen Algorithmus an, der VERTEX COVER in polynomieller Zeit unter Benutzung von  $\mathcal{A}$  entscheidet und begründen Sie dessen Korrektheit.

Name: .....

Matr.-Nr.: .....

**Aufgabe 4: Polynomzeitreduktion**

(3 + 2 + 1 + 3 + 3 Punkte)

Betrachten Sie die folgenden Probleme.

**HAMILTONKREIS**

**Eingabe:** Ein ungerichteter Graph  $G = (V, E)$ .

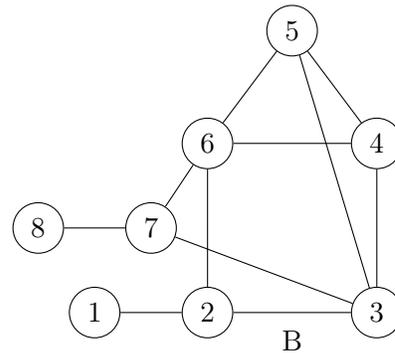
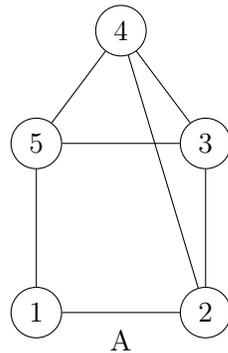
**Frage:** Gibt es einen Kreis in  $G$ , der jeden Knoten aus  $V$  genau einmal enthält?

**HAMILTONPFAD**

**Eingabe:** Ein ungerichteter Graph  $G = (V, E)$ .

**Frage:** Gibt es einen Pfad in  $G$ , der jeden Knoten aus  $V$  genau einmal enthält?

- (a) Kennzeichnen Sie durch Nummerierung der Knoten in Graph A einen *Hamiltonkreis* und in Graph B einen *Hamiltonpfad*.



- (b) Geben Sie eine Polynomzeitreduktion  $f$  von HAMILTONKREIS auf HAMILTONPFAD an, indem Sie
- drei Knoten zum Eingabegraph hinzufügen, von denen zwei Knotengrad eins haben, und diese geeignet mit den restlichen Knoten verbinden,
  - begründen, dass  $f$  in Polynomzeit berechnet werden kann,
  - zeigen, dass für alle Graphen  $G$  gilt:  $G \in \text{HAMILTONKREIS} \Rightarrow f(G) \in \text{HAMILTONPFAD}$  und
  - zeigen, dass für alle Graphen  $G$  gilt:  $f(G) \in \text{HAMILTONPFAD} \Rightarrow G \in \text{HAMILTONKREIS}$ .

Name: .....

Matr.-Nr.: .....

Aufgabe 5: Vermischtes zu Komplexitätsklassen

(4+4+4 Punkte)

- (a) Sei  $A$  eine NP-vollständige Sprache. Zeigen Sie, dass  $\bar{A}$  coNP-vollständig ist.
- (b) Sei  $A$  eine NP-vollständige Sprache. Zeigen Sie, dass „ $A \in P \Rightarrow \text{coNP} = P$ “ gilt.
- (c) Begründen oder widerlegen Sie kurz die folgende Behauptung:  
Unter der Annahme  $P \neq \text{NP}$  gilt, dass CLIQUE auf Graphen mit maximalem Knotengrad 17 NP-vollständig ist.

**CLIQUE**

**Eingabe:** Ein ungerichteter Graph  $G$  und eine Zahl  $k > 0$ .

**Frage:** Hat  $G$  einen vollständigen Teilgraphen mit mindestens  $k$  Knoten?