

Name:

Matr.-Nr.:

Wiederholungsklausur: Berechenbarkeit und Komplexität
(Niedermeier/Froese/Molter, Sommersemester 2017)

Einlesezeit: 15 Minuten
Bearbeitungszeit: 60 Minuten
Max. Punktezahl: 50 Punkte

1	2	3	4	5	Σ
(10)	(8)	(8)	(12)	(12)	(50)

Allgemeine Hinweise:

- Es sind keinerlei Hilfsmittel erlaubt.
- Benutzen Sie einen dokumentenechten Stift in der Farbe schwarz oder blau. Insbesondere also keinen Bleistift, sondern einen Kugelschreiber.
- Beschriften Sie jedes Blatt mit ihrem Vor- und Nachnamen und ihrer Matrikelnummer.
- **Falls es in der Aufgabenstellung nicht explizit ausgeschlossen wird, so sind alle Antworten zu begründen! Antworten ohne Begründung erhalten 0 Punkte.**

Viel Erfolg!

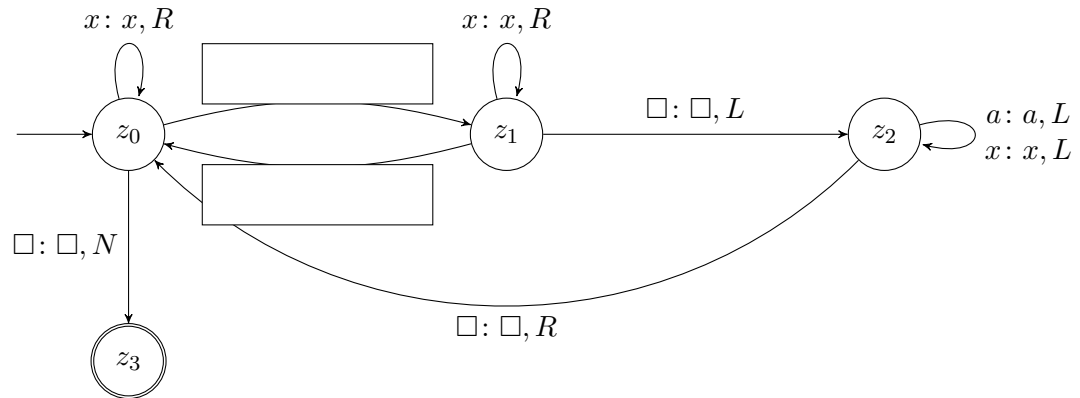
Aufgabe 1: Turing-Maschinen

(5 + 5 Punkte)

(a) Vervollständigen Sie die Übergangsfunktion δ der folgenden Turing-Maschine

$$M_1 = (\{z_0, z_1, z_2, z_3\}, \{a\}, \{a, x, \square\}, \delta, z_0, \square, \{z_3\}),$$

sodass $T(M_1) = \{a^{2^n} \mid n \geq 0\}$, wobei δ die folgende graphische Darstellung hat:



Name:

Matr.-Nr.:

Aufgabe 2: Die Komplexitätsklassen P und NP

(4 + 4 Punkte)

Im Folgenden sei Σ ein endliches Alphabet.

Begründen oder widerlegen Sie jeweils die beiden folgenden Aussagen.

- (a) Seien A und B mit $B \subseteq A \subseteq \Sigma^*$ zwei Sprachen. Falls A in P liegt, so liegt auch B in P .
- (b) Für jede Sprache $A \subseteq \Sigma^*$ aus NP und für jede Sprache $B \subseteq \Sigma^*$ aus P gilt, falls $A \cap B$ und $A \cap (\Sigma^* \setminus B)$ in P liegen, so liegt A in P .

Name:

Matr.-Nr.:

Aufgabe 3: Graphbibliotheken

(2 + 6 Punkte)

Betrachten Sie die beiden folgenden Graphprobleme.

DOMINATING SET

Eingabe: Ein ungerichteter Graph G und eine Zahl $k > 0$.

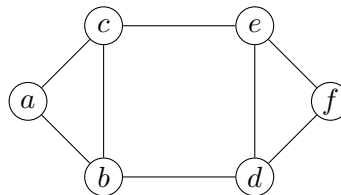
Frage: Gibt es k Knoten in G , sodass jeder andere Knoten mindestens einen dieser k Knoten als Nachbarn hat?

VERTEX COVER

Eingabe: Ein ungerichteter Graph G und eine Zahl $k > 0$.

Frage: Gibt es k Knoten in G , sodass jede Kante mindestens einen dieser Knoten als Endpunkt hat?

- (a) Geben Sie ein kleinstmögliches Dominating Set und ein kleinstmögliches Vertex Cover für den abgebildeten Graphen an (ohne Begründung).



- (b) Nehmen Sie an, dass ein Polynomzeitalgorithmus \mathcal{A} existiert, der DOMINATING SET entscheidet. Geben Sie einen Algorithmus an, der VERTEX COVER in polynomieller Zeit unter Benutzung von \mathcal{A} entscheidet und begründen Sie dessen Korrektheit.

Name:

Matr.-Nr.:

Aufgabe 4: Polynomzeitreduktion

(3 + 2 + 1 + 3 + 3 Punkte)

Betrachten Sie die folgenden Probleme.

HAMILTONKREIS

Eingabe: Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$.

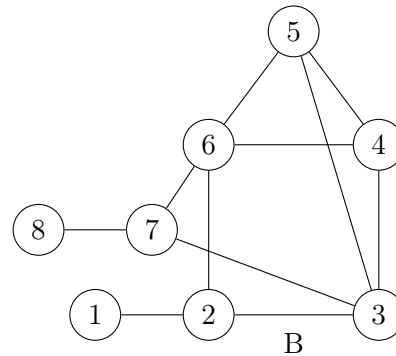
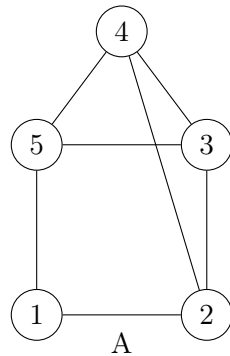
Frage: Gibt es einen Kreis in G , der jeden Knoten aus V genau einmal enthält?

HAMILTONPFAD

Eingabe: Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$.

Frage: Gibt es einen Pfad in G , der jeden Knoten aus V genau einmal enthält?

- (a) Kennzeichnen Sie durch Nummerierung der Knoten in Graph A einen *Hamiltonkreis* und in Graph B einen *Hamiltonpfad*.



- (b) Geben Sie eine Polynomzeitreduktion f von HAMILTONKREIS auf HAMILTONPFAD an, indem Sie
- drei Knoten zum Eingabegraph hinzufügen, von denen zwei Knotengrad eins haben, und diese geeignet mit den restlichen Knoten verbinden,
 - begründen, dass f in Polynomzeit berechnet werden kann,
 - zeigen, dass für alle Graphen G gilt: $G \in \text{HAMILTONKREIS} \Rightarrow f(G) \in \text{HAMILTONPFAD}$ und
 - zeigen, dass für alle Graphen G gilt: $f(G) \in \text{HAMILTONPFAD} \Rightarrow G \in \text{HAMILTONKREIS}$.

Name:

Matr.-Nr.:

Aufgabe 5: Vermischtes zu Komplexitätsklassen

(4+4+4 Punkte)

- (a) Sei A eine NP-vollständige Sprache. Zeigen Sie, dass \bar{A} coNP-vollständig ist.
- (b) Sei A eine NP-vollständige Sprache. Zeigen Sie, dass „ $A \in P \Rightarrow \text{coNP} = P$ “ gilt.
- (c) Begründen oder widerlegen Sie kurz die folgende Behauptung:
Unter der Annahme $P \neq \text{NP}$ gilt, dass CLIQUE auf Graphen mit maximalem Knotengrad 17 NP-vollständig ist.

CLIQUE

Eingabe: Ein ungerichteter Graph G und eine Zahl $k > 0$.

Frage: Hat G einen vollständigen Teilgraphen mit mindestens k Knoten?