Technische Universität Berlin, 20.02.2019

Name: .... **Matr.-Nr.: ....**

Klausur: Berechenbarkeit und Komplexität (A)

(Niedermeier/Bentert/Zschoche, Wintersemester 2018/2019)

Einlesezeit:	15 Minuten
Bearbeitungszeit:	60 Minuten
Max. Punktezahl:	50 Punkte

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**Σ**
(10)	(10)	(9)	(11)	(10)	(50)

Allgemeine Hinweise:

- Es sind keinerlei Hilfsmittel erlaubt.
- Benutzen Sie einen dokumentenechten Stift in der Farbe schwarz oder blau. Insbesondere also keinen Bleistift, sondern einen Kugelschreiber.
- Beschriften Sie jedes Blatt mit ihrem Vor- und Nachnamen und ihrer Matrikelnummer.
- **Falls es in der Aufgabenstellung nicht explizit ausgeschlossen wird, so sind alle Antworten zu begründen! Antworten ohne Begründung erhalten 0 Punkte.**

Viel Erfolg!

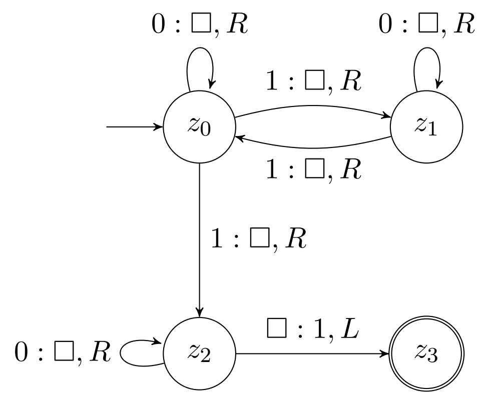
Name: .... **Matr.-Nr.: ....**

Aufgabe 1: **Turing-Maschinen** (2 + 3 + 5 Punkte)

Betrachten Sie die folgende Turing-Maschine:

$$M = (\{z_0, z_1, z_2, z_3\}, \{0, 1\}, \{0, 1, \Box\}, \delta, z_0, \Box, \{z_3\}),$$

wobei δ wie folgt definiert ist:



(a) Hält M auf dem Eingabewort 010? (Ohne Begründung)

(b) Ist die Turing-Maschine M deterministisch?

(c) Welche Sprache wird von M akzeptiert? (Ohne Begründung)

Name: .... **Matr.-Nr.: ....**

Aufgabe 2: **PCP** (1 + 1 + 4 + 4 Punkte)

Sind die folgenden Aussagen korrekt?

(a) Das PCP-Problem ist entscheidbar. (Ohne Begründung)

(b) Das MPCP-Problem ist semi-entscheidbar. (Ohne Begründung)

(c) Die PCP-Instanz $(\Sigma = \{a, b, c\}, \langle(abc, a), (b, bc), (a, ba)\rangle)$ hat eine Lösung.

(d) Die PCP-Instanz $(\Sigma = \{a, b, c\}, \langle(a, b), (bbcc, bcb), (b, c), (abac, cac)\rangle)$ hat eine Lösung.

Erinnerung:

PCP

Eingabe: Eine Alphabet Σ und eine Liste $L = \langle(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_k, y_k)\rangle$ von Tupeln, wobei $x_i, y_i \in \Sigma^*$.

Frage: Gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ und eine Sequenz $i_1, i_2, \ldots, i_n$, sodass $1 \leq i_j \leq k$ und

$$x_{i_1} \cdot x_{i_2} \ldots \cdot x_{i_n} = y_{i_1} \cdot y_{i_2} \ldots \cdot y_{i_n}?$$

Das MPCP-Problem und das PCP-Problem unterscheiden sich nur darin, dass beim MPCP-Problem das erste Tupel vorgegeben ist ($i_1 = 1$).

Name: .... **Matr.-Nr.: ....**

Aufgabe 3: **Verständnis von Polynomzeitreduktionen** (3 + 3 + 3 Punkte)

(a) Sei A eine beliebige NP-schwere Sprache und B eine beliebige NP-vollständige Sprache.

  (i) Gilt immer $A \leq_m^p B$?

  (ii) Gilt immer $B \leq_m^p A$?

(b) Kann es eine NP-schwere Sprache geben, die in P liegt?

Name: .... **Matr.-Nr.: ....**

Aufgabe 4: **Reduktion I** (2 + 9 Punkte)

Betrachten Sie die beiden folgenden, aus der Vorlesung bekannten Probleme:

HITTING SET

Eingabe: Eine Grundmenge $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, eine Familie $\mathcal{F} = \{S_1, S_2, \ldots, S_m\}$, wobei jedes $S_i \in \mathcal{F}$ eine nicht-leere Teilmenge von X ist ($S_i \neq \emptyset$) und eine natürliche Zahl k.

Frage: Existiert eine Teilmenge $X' \subseteq X$ mit $|X'| \leq k$, sodass für jedes $S_i \in \mathcal{F}$ gilt, dass $X' \cap S_i \neq \emptyset$?

DOMINATING SET

Eingabe: Ein (einfacher) ungerichteter Graph $G = (V, E)$ und eine natürliche Zahl k.

Frage: Existiert eine Knotenmenge $V' \subseteq V$ mit $|V'| \leq k$, sodass alle Knoten in $V \setminus V'$ mindestens einen Nachbarn in V' haben?

Gegeben sei die Funktion f, die wie folgt definiert ist. Sei $(X, \mathcal{F}, k)$ eine HITTING SET-Instanz, dann ist $f((X, \mathcal{F}, k)) = (G = (V, E), k + 1)$ eine DOMINATING SET-Instanz, wobei gilt:

1. Für jedes Element $x \in X$ gibt es einen Knoten $v_x \in V$.
2. Für jede Teilmenge $S_i \in \mathcal{F}$ gibt es einen Knoten $s_i \in V$.
3. Zwischen Knoten $v_x \in V$ und $s_i \in V$ gibt es genau dann eine Kante, wenn $x \in S_i$.
4. Zusätzlich gibt es noch zwei Knoten $z_1, z_2 \in V$, wobei z_2 mit jedem Knoten in der Menge $\{z_1\} \cup \{v_x \mid x \in X\}$ benachbart ist.

(a) Sei $I = (X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}, \mathcal{F} = \{S_1 = \{x_1, x_2\}, S_2 = \{x_1, x_3\}, S_3 = \{x_2, x_3, x_4\}\}, k = 2)$ eine Instanz von HITTING SET. Geben Sie $f(I)$ an, d.h. geben Sie die aus der gegebenen Funktion f resultierende DOMINATING SET-Instanz an.

(b) Beweisen Sie, dass die gegebene Funktion f eine Polynomzeitreduktion von HITTING SET auf DOMINATING SET ist.

Name: .... **Matr.-Nr.: ....**

Aufgabe 5: **Reduktion II** (10 Punkte)

Zeigen Sie durch eine Polynomzeitreduktion von dem PSPACE-schweren Problem Almost Alternating TQBF, dass Alternating TQBF ebenfalls PSPACE-schwer ist:

Alternating TQBF

Eingabe: Eine quantifizierte aussagenlogische Formel der Form

$$E = \forall x_1 : \exists x_2 : \forall x_3 : \exists x_4 : \ldots \forall x_{n-1} : \exists x_n : F(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

wobei F eine quantorenfreie aussagenlogische Formel mit Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ist.

Frage: Ist E wahr?

Almost Alternating TQBF unterscheidet sich von Alternating TQBF darin, dass mit den Variablen x_2 und x_3 zwei aufeinanderfolgende Variablen durch einen Existenzquantor gebunden sind. Die formale Definition ist damit:

Almost Alternating TQBF

Eingabe: Eine quantifizierte aussagenlogische Formel der Form

$$E = \forall x_1 : \exists x_2 : \exists x_3 : \forall x_4 : \exists x_5 : \forall x_6 : \exists x_2 : \ldots \forall x_{n-1} : \exists x_n : F(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

wobei F eine quantorenfreie aussagenlogische Formel mit Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ist.

Frage: Ist E wahr?