

Juli – Klausur
Differentialgleichungen für Ingenieure

Name: Vorname:
Matr.-Nr.: Studiengang:

Neben einem handbeschriebenen A4 Blatt mit Notizen ist nur die ausgegebene oder von der ISIS-Seite heruntergeladene Laplacetabelle zugelassen. Taschenrechner und Formelsammlungen sind nicht zugelassen. Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Geben Sie im Rechenteil immer den **vollständigen Rechenweg** und im Verständnisteil, wenn nichts anderes gesagt ist, immer eine **kurze Begründung** an.

Die Bearbeitungszeit beträgt **100 Minuten**.

Die Gesamtklausur ist mit 30 von 60 Punkten bestanden, wenn in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens 10 Punkte erreicht werden.

Korrektur

1	2	3	Σ_R	4	5	6	Σ_V	Σ

Rechenteil

1. Aufgabe

11 Punkte

Gegeben ist die DGL

$$y''(t) - 10y'(t) + 25y(t) = 25t + 15 - 2e^{5t}.$$

- Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem der homogenen DGL. Nutzen Sie hierfür den Exponentialansatz.
- Finden Sie eine partikuläre Lösung der inhomogenen DGL mit dem Ansatz der rechten Seite.
- Geben Sie die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL an.

2. Aufgabe

9 Punkte

Seien $f, g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $f(t) := 3t$, $g(t) := e^{3t}$. Finden Sie eine integralfreie Darstellung des Faltungintegrals

$$f * g(t) = \int_0^t f(\theta)g(t - \theta) d\theta,$$

unter Anwendung des Faltungssatzes und des Satzes von Lerch.

3. Aufgabe

10 Punkte

Gegeben sei das AWP

$$(*) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x} + u,$$
$$u(x, 0) = 3e^{4x} + e^{-x} + 2e^{-9x}.$$

- Finden Sie eine Lösung dieses AWP auf $\mathbb{R} \times [0, \infty)$ mit Hilfe des Produktansatzes $u(x, t) = X(x)T(t)$.
- Welche Lösungen der PDG (*) ergeben sich aus dem Summenansatz $u(x, t) = X(x) + T(t)$?

Verständnisteil

4. Aufgabe

14 Punkte

Gegeben sei das nichtlineare System von DGLen

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 4x - xy - 2x^2, \\ \dot{y} &= -y + xy.\end{aligned}$$

- Bestimmen Sie alle drei Gleichgewichtspunkte (x^*, y^*) des Systems.
- Bestimmen Sie den Stabilitätscharakter des DGL-Systems in jedem der drei Gleichgewichtspunkte (x^*, y^*) .

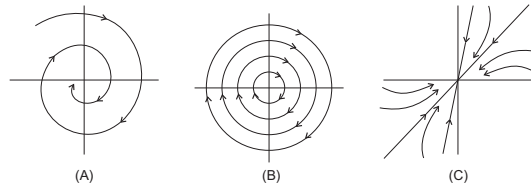
5. Aufgabe

10 Punkte

Gegeben ist die DGL zweiter Ordnung

$$y''(t) + y(t) = 0.$$

- Stellen Sie das zugehörige System $\vec{y}' = A\vec{y}$ von DGLen erster Ordnung auf.
- Zeigen Sie, dass $(1, i)^T$ ein Eigenvektor von A ist.
- Bestimmen Sie mit b) ein komplexes Fundamentalsystem der DGL und leiten Sie daraus ein reelles Fundamentalsystem ab.
- Sei $\vec{F}(\vec{x}) := A\vec{x}$, mit $\vec{x} = (y, y')^T$ und A aus a). Welches der abgebildeten Phasenportraits gehört zu dieser DGL? Begründen Sie Ihre Entscheidung!



6. Aufgabe

6 Punkte

Gegeben sei das System von DGLen

$$\dot{x} = 2y, \quad \dot{y} = -x^2.$$

Leiten Sie eine Erhaltungsgröße $E(x, y) \neq 0$ her, indem Sie den Summenansatz $E(x, y) = X(x) + Y(y)$ machen und die Formel $0 = X'(x)\dot{x} + Y'(y)\dot{y}$ nutzen.