Musterlösung
Differentialgleichungen für Ingenieurwissenschaften, 19. Februar 2016

1. Aufgabe

11 Punkte

Aus

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -1 \\ 0 & 1-\lambda & 2 \\ 3 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned} \implies 0 &= (1-\lambda)^2(-1-\lambda) + 3(1-\lambda) - 2(1-\lambda) \\ &= (1-\lambda)\left[(1-\lambda)(-1-\lambda)+1\right] = (1-\lambda)\lambda^2 \end{aligned}$$

ergeben sich der doppelte Eigenwert 0 und der einfache Eigenwert 1.

Der Eigenraum zum Eigenwert 1 ist eindimensional:

$$\operatorname{Kern}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}\right) = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

Der Eigenraum zum Eigenwert 0 ist eindimensional:

$$\operatorname{Kern}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}\right) = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

Beim Eigenwert 0 ist die algebraische Vielfachheit größer als die geometrische Vielfachheit.

Folglich ist ein weiterer, linear unabhängiger Hauptvektor h zum Eigenwert 1 zu suchen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \vec{h} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Durch Anschauen der 3. Spalte findet man als eine inhomogene Lösung:

$$\vec{h} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Allgemein:

$$\vec{h} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c \in \mathbb{C}$$

Man hat nur noch Konstanten C_1, C_2 und C_3 zu bestimmen, so dass

$$\vec{y}(t) = C_1 \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3 \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

die Anfangswertsbedingung erfüllt.

Anpassung an den Anfangswert ergibt

$$y(0) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} \implies C_1 = 1,\ C_2 = 0,\ C_3 = 2$$

Die Lösung des vorgelegten Anfangswertsproblems ist

$$\vec{y}(t) = \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

2. Aufgabe

9 Punkte

Mit $X(s) := \mathcal{L}[x](s)$ ergibt sich im Laplace-Bereich

$$\begin{aligned} s^2X - s + 1 + 4(sX - 1) + 3X &= \frac{18\mathrm{e}^{-s}}{s^2} \\ (s^2 + 4s + 3)X - s - 3 &= \frac{18\mathrm{e}^{-s}}{s} \\ X &= \frac{s+3}{s^2+4s+3} + \frac{18\mathrm{e}^{-s}}{s^2(s^2+4s+3)} \end{aligned}$$

Leichte Kürzung:

$$\frac{s+3}{s^2+4s+3} = \frac{s+3}{(s+1)(s+3)} = \frac{1}{s+1}$$

Rücktransformation und Lösung:

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{1}{s+1} + \mathrm{e}^{-s}\left(-\frac{8}{s} + \frac{6}{s^2} + \frac{9}{s+1} - \frac{1}{s+3}\right) \\ &= \mathcal{L}\left[\mathrm{e}^{-t} + u_1(t)\left(-8 + 6(t-1) + 9\mathrm{e}^{-(t-1)} - \mathrm{e}^{-3t}\right)\right](s) \end{aligned}$$

mit Satz von Lerch

$$x(t) = \mathrm{e}^{-t} + u_1(t)\left(-8 + 6(t-1) + 9\mathrm{e}^{-(t-1)} - \mathrm{e}^{-3(t-1)}\right)$$

3. Aufgabe

10 Punkte

a) Partielle DGL ergibt mit dem Produktansatz $u(x,t) = X(x)T(t)$:
$X''(x)T(t) + X(x)T'(t) = 0$
Für $u(x,t) \neq 0$ ist Division der DGL durch Produkt $X(x)T(t)$ und Separation statthaft:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{T'(t)}{T(t)} = 0 \implies \frac{X''(x)}{X(x)} =: \lambda = -\frac{T'(t)}{T(t)}$$

DGLn in X und T:

$$X''(x) - \lambda X(x) = 0, \qquad T'(t) + \lambda T(t) = 0.$$

Aus der Randbedingung

$$u(0,t) = u(2\pi, t) = 0$$

folgt die Aussage $X(0) = X(2\pi) = 0$.
Für die DGL $X''(x) - \lambda X(x) = 0$ kann es nicht-konstante periodische Lösungen nur für $\lambda < 0$ geben. Wir setzen $\sqrt{-\lambda} := \mu$. Dann ist

$$\begin{aligned} X(x) &= C_1 \cos \mu x + C_2 \sin \mu x,\ C_1, C_2 \in \mathbb{R} \\ X(0) = C_1 = 0 &\implies X(\pi) = C_2 \sin 2\mu\pi = 0 \\ &\implies C_2 = 0 \text{ oder } \sin 2\mu\pi = 0 \end{aligned}$$

Nicht-verschwindende Lösungen $X(x)$ gibt es für solche Werte von μ, die die Gleichung $\sin 2\mu\pi = 0$ erfüllen. 2μ muss gleich einer natürlichen Zahl n mit $n > 0$ sein, also $\mu = \frac{n}{2}$. Damit ist λ gleich einer der Zahlen λ_n mit

$$\lambda_n = -\frac{n^2}{4}, \quad n \in \mathbb{N}, n > 0.$$

Für jede Wahl von n ergibt sich eine Lösung T_n für T

$$T_n(t) = \mathrm{e}^{-\lambda_n t} = \mathrm{e}^{\frac{n^2}{4} t}$$

Für $u(x,t)$ hat man also die Funktionen $u_n(x,t)$ mit $n \in \mathbb{N}, n > 0$:

$$u_n(x,t) := \mathrm{e}^{\frac{n^2}{4} t} \sin \frac{n}{2} x.$$

gefunden.

b) Mit der Superposition

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \mathrm{e}^{\frac{n^2}{4}t} \sin \frac{n}{2}x$$

sind Koeffizienten A_n zu suchen mit

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n}{2}x = 5 \sin 2x + 4 \sin 3x,$$

also

$$A_4 = 5,\ A_6 = 4, \qquad A_n = 0 \text{ für } n \in \mathbb{N} \setminus \{4,6\};$$

Damit hat man für die gesuchte Lösung

$$u(x,t) = 5\mathrm{e}^{4t} \sin 2x + 4\mathrm{e}^{9t} \sin 3x$$

4. Aufgabe

10 Punkte

a) Mit Trennung der Veränderlichen findet sich

$$\begin{aligned}(2\sqrt{x})y' - y^2 - 1 &= 0\\ y' &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot (1+y^2)\\ \int \frac{1}{1+y^2}\,\mathrm{d}y &= \int \frac{1}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x\\ \arctan y &= \sqrt{x} + C, \quad C \in \mathbb{R}\\ y &= \tan(C+\sqrt{x}), \quad C \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Mit $y\left(\frac{\pi^2}{16}\right) = 1$ hat man

$$\begin{gathered}\tan(C + \frac{\pi}{4}) = 1\\ \text{z.B. } C = 0.\end{gathered}$$

Also lautet die Lösung:

$$y(x) = \tan\sqrt{x}.$$

Wegen der Wurzel und der Vorgabe im AWP gilt $x > 0$.

Der maximale Definitionsbereich wird von rechts durch die erste positive Polstelle des Tangens begrenzt, nämlich $\frac{\pi}{2}$, also muss auch $x < \frac{\pi^2}{4}$ gelten. Die angegebene Lösung hat den maximalen Definitionsbereich $]0, \frac{\pi^2}{4}[$.

b) Die implizite DGL nach y' auflösen:

$$y' = \frac{1+y^2}{2\sqrt{x}}.$$

Den EES benutzen: Man setzt

$$F(x,y) := \frac{1+y^2}{2\sqrt{x}}.$$

F hat die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{1+y^2}{4\sqrt{x^3}}, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x}}.$$

Für $x > 0$ (rechte Halbebene) existieren diese partiellen Ableitungen und sind stetig. Der Anfangspunkt $(\frac{\pi^2}{16}, 1)$ liegt in dieser rechten Halbebene. Damit hat nach dem EES das vorgegebene AWP genau eine Lösung.

5. Aufgabe

10 Punkte

Gleichgewichtslösungen (x^*, y^*) erfüllen

$$(x^* - 1)(y^* - 2) = 0, \qquad (x^* - 5)(y^* - 1) = 0.$$

Damit sind $(1,1)$ und $(5,2)$ zwei Gleichgewichtslösungen.

Für die Jacobi-Matrix hat man

$$\mathcal{J}(x,y) = \begin{pmatrix} y-2 & x-1 \\ y-1 & x-5 \end{pmatrix}.$$

Für den GGP $(1,1)$ ist

$$\mathcal{J}(1,1) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Die Eigenwerte dieser Matrix sind gleich -1 und -4. Alle Eigenwerte haben negativen Realteil. Mit dem genannten Stabilitätssatz kann hier entschieden werden: Der GGP $(1,1)$ ist asymptotisch stabil.
Für den GGP $(5,2)$ ist

$$\mathcal{J}(5,2) = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Determinante dieser (2×2)-Matrix ist -4 und somit negativ. Folglich ist einer der Eigenwerte positiv. Mit dem genannten Stabilitätssatz kann hier entschieden werden: Der GGP $(5,2)$ ist instabil.

Die Eigenwerte von $\mathcal{J}(5,2)$ sind 2 und -2.

6. Aufgabe

10 Punkte

a) Falsch.
Man macht den Wronski-Test an der Stelle 0:

$$\left.\begin{vmatrix} 2\cos 2x & \cos^2 x - \sin^2 s \\ -4\sin 2x & 2\cos x(-\sin x) - 2\sin x\cos x \end{vmatrix}\right|_{x=0} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Diese Lösungen sind nicht linear unabhängig und bilden daher kein Fundamentalsystem.

Es ist $2\cos 2x = 2(\cos^2 x - \sin^2 x)$.

b) Wahr.
Es gilt nämlich

$$(\vec{y}_1 + \vec{y}_2)' = \vec{y}_1' + \vec{y}_2' = Ay_1 + Ay_2 = A(y_1 + y_2).$$

c) Wahr.
Es ist

$$\dot{E} = E_x\dot{x} + E_y\dot{y} = 2x \cdot y + (-2y) \cdot x = 0.$$

d) Falsch.
Im Laplace-Bereich findet man $\frac{1}{s-1} \cdot \frac{1}{s+1} = \frac{1}{s}$, was offensichtlich falsch ist.
Die Aussage $\mathrm{e}^t * \mathrm{e}^{-t} = \mathbf{1}$ führt zu einem Widerspruch und ist daher falsch.

e) Wahr.
Die Summe zweier Quadrate ist nur dann Null, wenn die Summanden einzeln verschwinden:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Wenn aber von u beide partiellen Ableitungen verschwinden, ist u konstant.