Musterlösung
Differentialgleichungen für Ingenieurwissenschaften, 07. April 2016

1. Aufgabe

11 Punkte

Aus

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & -\lambda & -2 \\ -3 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\implies 0 = (-\lambda)^2(2-\lambda) - 3\lambda + 2\lambda \implies 0 = \lambda^2(2-\lambda) - \lambda$$
$$\implies 0 = \lambda(2\lambda - \lambda^2 - 1) \implies 0 = -\lambda(\lambda-1)^2$$

ergeben sich der einfache Eigenwert 0 und der doppelte Eigenwert 1.

Der Eigenraum zum Eigenwert 0 ist eindimensional:

$$\text{Kern}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ -3 & -1 & 2 \end{pmatrix}\right) = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

Der Eigenraum zum Eigenwert 1 ist eindimensional:

$$\text{Kern}\left(\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}\right) = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

Beim Eigenwert 1 ist die algebraische Vielfachheit größer als die geometrische Vielfachheit.

Folglich ist ein weiterer, linear unabhängiger Hauptvektor h zum Eigenwert 1 zu suchen:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \vec{h} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Durch Anschauen der 3. Spalte findet man als eine inhomogene Lösung:

$$\vec{h} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Allgemein:

$$\vec{h} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c \in \mathbb{C}$$

Man hat nur noch Konstanten C_1, C_2 und C_3 zu bestimmen, so dass

$$\vec{y}(t) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3 \mathrm{e}^t \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

die Anfangswertsbedingung erfüllt.

Anpassung an den Anfangswert ergibt

$$y(0) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} \implies C_1 = 1,\ C_2 = 1,\ C_3 = 0$$

Die Lösung des vorgelegten Anfangswertsproblems ist

$$\vec{y}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. Aufgabe

9 Punkte

Mit $X(s) := \mathcal{L}[x](s)$ ergibt sich im Laplace-Bereich

$$\begin{aligned} s^2X - s + 1 + 3(sX - 1) + 2X &= \mathrm{e}^{-2s} \\ (s^2 + 3s + 2)X - s - 2 &= \mathrm{e}^{-2s} \\ X &= \frac{s+2}{s^2+3s+2} + \frac{\mathrm{e}^{-2s}}{s^2+3s+2} \end{aligned}$$

Leichte Kürzung:

$$\frac{s+2}{s^2+3s+2} = \frac{s+2}{(s+1)(s+2)} = \frac{1}{s+1}$$

PBZ (Zuhaltemethode):

$$\frac{1}{s^2+3s+2} = \frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}$$

Rücktransformation und Lösung:

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{1}{s+1} + \mathrm{e}^{-2s}\left(\frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}\right) \\ &= \mathcal{L}\left[\mathrm{e}^{-t} + u_2(t)\left(\mathrm{e}^{-(t-2)} - \mathrm{e}^{-2(t-2)}\right)\right](s) \end{aligned}$$

mit Satz von Lerch

$$x(t) = \mathrm{e}^{-t} + u_2(t)\left(\mathrm{e}^{-(t-2)} - \mathrm{e}^{-2(t-2)}\right)$$

3. Aufgabe

10 Punkte

a) Partielle DGL ergibt mit dem Produktansatz $u(x,t) = X(x)T(t)$:
$X''(x)T(t) + 2X(x)T'(t) = X(x)T(t)$
Für $u(x,t) \neq 0$ ist Division der DGL durch Produkt $X(x)T(t)$ und Separation statthaft:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{T'(t)}{T(t)} + 25 = 0 \implies \frac{X''(x)}{X(x)} =: \lambda = -25 - \frac{T'(t)}{T(t)}$$

DGLn in X und T:

$$X''(x) - \lambda X(x) = 0, \qquad T'(t) + (\lambda + 25)T(t) = 0.$$

Aus der Randbedingung

$$u(0,t) = u(2\pi,t) = 0$$

folgt die Aussage $X(0) = X(2\pi) = 0$.
Für die DGL $X''(x) - \lambda X(x) = 0$ kann es nicht-konstante periodische Lösungen nur für $\lambda < 0$ geben. Wir setzen $\sqrt{-\lambda} := \mu$. Dann ist

$$X(x) = C_1 \cos \mu x + C_2 \sin \mu x, \; C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$
$$X(0) = C_1 = 0 \implies X(\pi) = C_2 \sin \mu\pi = 0$$
$$\implies C_2 = 0 \text{ oder } \sin \mu\pi = 0$$

Nicht-verschwindende Lösungen $X(x)$ gibt es für solche Werte von μ, die die Gleichung $\sin \mu\pi = 0$ erfüllen. μ muss gleich einer natürlichen Zahl n mit $n > 0$ sein, also $\mu = n$. Damit ist λ gleich einer der Zahlen λ_n mit

$$\lambda_n = -n^2, \quad n \in \mathbb{N}, n > 0.$$

Für jede Wahl von n ergibt sich eine Lösung T_n für T

$$T_n(t) = \mathrm{e}^{-(\lambda_n + 25)t} = \mathrm{e}^{(n^2 - 25)t}$$

Für $u(x,t)$ hat man also die Funktionen $u_n(x,t)$ mit $n \in \mathbb{N}, n > 0$:

$$u_n(x,t) := \mathrm{e}^{(n^2-25)t} \sin nx.$$

gefunden.

b) Mit der Superposition

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \mathrm{e}^{(n^2-25)t} \sin nx$$

sind Koeffizienten A_n zu suchen mit

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin nx = 5 \sin 3x + 2 \sin 4x,$$

also

$$A_3 = 5,\ \ A_4 = 2, \qquad A_n = 0 \text{ für } n \in \mathbb{N} \setminus \{3,4\};$$

Damit hat man für die gesuchte Lösung

$$u(x,t) = 5\mathrm{e}^{-16t} \sin 3x + 2\mathrm{e}^{-9t} \sin 4x$$

4. Aufgabe

10 Punkte

a) Mit Trennung der Veränderlichen findet sich

$$
\begin{aligned}
y' &= \frac{1}{2\sqrt{1+x}} \cdot \mathrm{e}^y \\
\int \mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}y &= \int \frac{1}{2\sqrt{1+x}}\,\mathrm{d}x \\
-\mathrm{e}^{-y} &= \sqrt{1+x} + C, \quad C \in \mathbb{R} \\
y &= -\ln\left(-\sqrt{1+x} + C\right), \quad C \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

Mit $y(0) = 0$ hat man

$$-\ln(-1+C) = 0 \quad \Longrightarrow \quad C = 2.$$

Also lautet die Lösung:

$$y(x) = -\ln\left(2 - \sqrt{1+x}\right)$$

Der maximale Definitionsbereich wird dadurch begrenzt, dass das Argument des Logarithmus als auch der Radikand positiv sein müssen. Mit $x > -1$ existiert die Wurzel ohnehin. Aus $2 - \sqrt{1+x} > 0$ folgt $x < 3$. Die angegebene Lösung hat den maximalen Definitionsbereich $\,]-1, 3[\,$.

b) Die implizite DGL nach y' auflösen:

$$y' = \frac{\mathrm{e}^y}{2\sqrt{1+x}}$$

Den EES benutzen: Man setzt

$$F(x,y) := \frac{\mathrm{e}^y}{2\sqrt{1+x}}$$

F hat die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{\mathrm{e}^y}{4\sqrt{(1+x)^3}} \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\mathrm{e}^y}{2\sqrt{1+x}}.$$

Diese partiellen Ableitungen existieren in der Halbebene $x > -1$ und sind dort stetig. Der Anfangspunkt $(0,0)$ liegt in dieser Ebene. Damit hat nach dem EES das vorgegebene AWP genau eine Lösung.

5. Aufgabe

10 Punkte

a) Gleichgewichtslösungen (x^*, y^*) erfüllen

$$(x^* - 5)(y^* - 2) = 0, \qquad (x^* - 1)(y^* - 1) = 0.$$

Damit sind $(5,1)$ und $(1,2)$ zwei Gleichgewichtslösungen.

b) Für die Jacobi-Matrix hat man

$$\mathcal{J}(x,y) = \begin{pmatrix} y-2 & x-5 \\ y-1 & x-1 \end{pmatrix}.$$

Für den GGP $(5,1)$ ist

$$\mathcal{J}(5,1) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Die Eigenwerte dieser Matrix sind gleich -1 und 4. Es gibt einen Eigenwert mit positivem Realteil. Mit dem genannten Stabilitätssatz kann hier entschieden werden: Der GGP $(5,1)$ ist instabil.
Für den GGP $(1,2)$ ist

$$\mathcal{J}(1,2) = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom ist λ^2+4 und hat die Nullstellen $2\mathrm{i}$ und $-2\mathrm{i}$. Der genannte Stabilitätssatz macht keine Aussage, da der Realteil dieser Eigenwerte weder positiv noch negativ ist.

6. Aufgabe

10 Punkte

a) Falsch.

α) Die vorgelegte DGL ist linear und insbesondere inhomogen. Somit kann die Summenfunktion $y_1 + y_2$ keine Lösung sein.

β) Man wähle z.B. $y_1(x) = 1$ und $y_2(x) = 1 + \mathrm{e}^x$, und findet umgehend die falsche Aussage

$$-1 = (1 + 1 + \mathrm{e}^x)' - (1 + 1 + \mathrm{e}^x) = \mathrm{e}^x - 2 - \mathrm{e}^x = -2$$

.

b) Wahr.

α) Das vorgelegte DGL-System ist linear und homogen und lebt im $\mathbb{R}^2$. Für seine Lösungen gibt es deshalb ein Fundamentalsystem, welches aus zwei Lösungen besteht.

β) Man wähle $\vec{y}_1(t) = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ und $\vec{y}_2(t) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$. Diese konstanten Funktionen sind linear unabhängig und lösen das DGL-System.

c) Wahr.
Die Systemmatrix des in Matrixform angeschriebenen dynamischen Systems

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

hat Spur 0 und Determinante 1 und somit die einfachen Eigenwerte i und $-$i. Diese Eigenwerte haben Realteil Null. Da das System zweidimensional ist, hat jeder dieser Eigenwerte die geometrische Vielfachheit 1. Es sind somit stets algebraische und geometrische Vielfachheit gleich. Damit ist nach dem Stabilitätssatz für den linearen Fall der Gleichgewichtspunkt $(0, 0)$ stabil.

d) Falsch.
Im Laplace-Bereich findet man $\frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s} = \frac{2}{s^2}$, was offensichtlich falsch ist. Die Aussage $t * t = t^2$ führt zu einem Widerspruch und ist daher falsch.

e) Wahr.
Einsetzen. Es gilt

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2,$$

damit ist

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2 + (-2) = 0.$$

Somit ist $u(x, y) = x^2 - y^2$ eine Lösung der vorgelegten partiellen Differentialgleichung.