Differentialgleichungen für Ingenieure (WS 2017/2018)
Musterlösung zur Aprilklausur

Wichtige Hinweise:

- Die hier angegebenen Musterlösungen eignen sich **nicht** zum Lernen des Vorlesungsstoffes und können daher beim Lernen nur zur Wissens*überprüfung* sinnvoll genutzt werden.
- Es ist nur sinnvoll, die Musterlösungen zu lesen, wenn man eine Aufgabe vorher selbst **vollständig gelöst** hat und sich sicher ist, dass die **eigene Lösung stimmt**. Wer eine Aufgabe der eigentlichen Klausur nicht lösen kann oder sich bei der eigenen Lösung unsicher ist, hat massive Probleme mit dem entsprechenden Vorlesungsstoff und sollte besser diesen wiederholen anstatt die Musterlösung zu lesen.
- Lösungswege, die von den hier angegebenen abweichen, können ebenso richtig sein. Daher ist es nicht wichtig, ob die eigene Lösung mit der Musterlösung übereinstimmt oder nicht, solange das Rechenergebnis stimmt.
- Erfahrungsgemäß werden die obigen Ratschläge häufig ignoriert. Dies dürfte einer der Gründe für **schlechte Klausurergebnisse** sein.

Aufgabe 1

(a) Die homogene Gleichung lautet

$$x'' - 6x' + 9x = 0.$$

Um ihre allgemeine reelle Lösung zu bestimmen, betrachten wir das charakteristische Polynom

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 6\lambda + 9,$$

das die Nullstellen

$$\lambda_{1,2} = 3 \pm \sqrt{3^2 - 9} = 3$$

besitzt. Da es sich bei $\lambda_{1,2} = 3$ um eine doppelte Nullstelle handelt, sind durch

$$x_1(t) = e^{3t} \text{ und } x_2(t) = te^{3t}$$

zwei linear unabhängige Lösungen gegeben, sodass

$$x_H(t) = C_1 e^{3t} + C_2 te^{3t}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

die allgemeine reelle Lösung der homogenen Gleichung ist.

(b) Um eine partikuläre Lösung x_p für den Fall $b(t) = 18t$ zu bestimmen, verwenden wir den Ansatz

$$x_p(t) = At + B$$

mit $A, B \in \mathbb{R}$. Indem wir diesen Ansatz in die Differentialgleichung einsetzen, erhalten wir

$$-6A + 9At + 9B = 18t.$$

Durch einen Koeffizientenvergleich ergibt sich daraus zuerst $A = 2$ und dann $B = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$. Damit ist

$$x_p(t) = 2t + \frac{4}{3}.$$

Zusammen mit der schon in (a) bestimmten allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung bekommen wir also

$$x(t) = C_1 e^{3t} + C_2 t e^{3t} + 2t + \frac{4}{3}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

als allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung.

(c) Ein geeigneter Ansatz lautet

$$x(t) = Ae^{7t} + Bt^2 e^{3t} + C\sin(2t) + D\cos(2t)$$

mit $A, B, C, D \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 2

(a) Das charakteristische Polynom der Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 9 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

lautet

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 9.$$

Also sind

$$\lambda_1 = 3i \text{ und } \lambda_2 = -3i$$

die Eigenwerte von A. Einen zu $\lambda_1 = 3i$ gehörigen Eigenvektor $\vec{v}_1$ bestimmen wir als (nichttriviale) Lösung von

$$\begin{bmatrix} -3i & 9 \\ -1 & -3i \end{bmatrix} \vec{v} = \vec{0}.$$

Hier lässt sich leicht

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 3i \\ -1 \end{bmatrix}$$

ablesen. Somit ist

$$\vec{x}_0(t) := e^{3it} \begin{bmatrix} 3i \\ -1 \end{bmatrix}$$

eine komplexe Lösung der Differentialgleichung. Wir erhalten daraus zwei linear unabhängige reelle Lösungen, indem wir hiervon den Real- und den Imaginärteil ausrechnen.

Es ist

$$\begin{aligned} \vec{x}_0(t) &= (\cos(3t) + i\sin(3t)) \begin{bmatrix} 3i \\ -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -3\sin(3t) \\ -\cos(3t) \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} 3\cos(3t) \\ -\sin(3t) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

und folglich

$$\operatorname{Re}(\vec{x}_0(t)) = \begin{bmatrix} -3\sin(3t) \\ -\cos(3t) \end{bmatrix}$$

sowie

$$\operatorname{Im}(\vec{x}_0(t)) = \begin{bmatrix} 3\cos(3t) \\ -\sin(3t) \end{bmatrix}.$$

Diese beiden Funktionen bilden also ein Fundamentalsystem.

(b) Offensichtlich löst sowohl $\vec{x}_1$ als auch $\vec{x}_2$ die Gleichung

$$\vec{x}\,' = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \vec{x}.$$

Um zu zeigen, dass $\vec{x}_1$ und $\vec{x}_2$ linear unabhängig sind, betrachten wir die Wronskimatrix

$$W(t) = \begin{bmatrix} e^{2t} & e^{2t} \\ e^{2t} & -e^{2t} \end{bmatrix}.$$

Dabei gilt

$$\det(W(t)) = -2e^{4t} \neq 0$$

für alle $t \in \mathbb{R}$, woraus die lineare Unabhängigkeit von $\vec{x}_1$ und $\vec{x}_2$ folgt. Da der Lösungsraum eines zweidimensionalen Systems ebenfalls zweidimensional ist, bilden zwei linear unabhängige Lösungen bereits ein Fundamentalsystem.

Erläuterungen:

- Anstatt $\det(W(t)) \neq 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ zu zeigen, kann man auch ein festes $t \in \mathbb{R}$ auswählen, zum Beispiel $t = 0$.

Aufgabe 3

(a) Wir lösen die Gleichung mittels Trennung der Veränderlichen. Dazu stellen wir sie um zu

$$x'(t)e^{3x(t)} = \cos(t).$$

Eine Integration auf beiden Seiten liefert

$$\int x'(t)e^{3x(t)}\,dt = \int \cos(t)\,dt$$

beziehungsweise

$$\frac{1}{3}e^{3x(t)} = \sin(t) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Daher ist

$$x(t) = \frac{1}{3}\ln\left(3\sin(t) + 3C\right), \quad C \in \mathbb{R}.$$

(b) Die durch

$$f(t,x) := \sin(x^2 - t) - 3e^t$$

definierte Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ist offenbar stetig differenzierbar. Nach dem Existenz- und Eindeutigkeitssatz besitzt das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} x' = \sin(x^2 + t) - 3e^t \\ x(0) = 3 \end{cases}$$

also genau eine (maximal fortgesetzte) Lösung.

Sei $\bar{x}\colon I \to \mathbb{R}$ diese Lösung, wobei $I \subset \mathbb{R}$ das Definitionsintervall bezeichne. Da $\bar{x}$ insbesondere die Differentialgleichung löst, gilt

$$\bar{x}'(t) = \sin\left((\bar{x}(t))^2 + t\right) - 3e^t$$

für alle $t \in I$. Wegen

$$\sin\left((\bar{x}(t))^2 + t\right) \leqslant 1$$

und

$$-3e^t \leqslant -3$$

für $t > 0$ ergibt sich hieraus

$$\bar{x}'(t) \leqslant 1 - 3 = -2 < 0$$

für alle $t \in I$ mit $t > 0$. Also ist $\bar{x}$ für $t > 0$ monoton fallend.

Erläuterungen:

- Die Funktion f selbst kann nicht auf Monotonie untersucht werden, da es sich bei f um eine Funktion von zwei Variablen handelt.

Aufgabe 4

(a) Für $\vec{x}_0 = 0$ gilt offensichtlich

$$\begin{bmatrix} \alpha - 1 & 4 & 3 \\ 0 & \alpha - 1 & -8 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \vec{x}_0 = \vec{0},$$

d.h. $\vec{x}_0 = \vec{0}$ ist eine Nullstelle der rechten Seite und somit ein Gleichgewichtspunkt des Systems.

(b) Da die Koeffizientenmatrix eine obere Dreicksmatrix ist, können ihre Eigenwerte auf der Diagonalen abgelesen werden. Sie lauten

$$\lambda_{1,2} = \alpha - 1 \text{ und } \lambda_3 = -3.$$

Fall 1: $\alpha < 1$:
Hier sind alle Eigenwerte negativ, weshalb der Nullpunkt nach einem Satz aus der Vorlesung asymptotisch stabil ist.

Fall 2: $\alpha > 1$:
In diesem Fall ist $\lambda_{1,2} > 0$, d.h. die Matrix hat einen positiven Eigenwert. Daraus folgt, dass der Nullpunkt instabil ist.

Fall 3: $\alpha = 1$:
Wenn $\alpha = 1$ ist, sind besitzt die Matrix zwar keinen positiven Eigenwert, aber es gibt den doppelten Eigenwert $\lambda_{1,2} = 0$. Da dessen geometrische Vielfachheit aber nur eins ist und somit nicht mit der algebraischen Vielfachheit übereinstimmt, ist der Nullpunkt nach einem Satz aus der Vorlesung instabil.

Aufgabe 5

Wir wenden auf beide Seiten der Gleichung

$$x' - 5x = 10 + \delta_2(t)$$

die Laplacetransformation an und erhalten aus der Linearität von $\mathcal{L}$ die Gleichung

$$\mathcal{L}[x'](s) - 5\mathcal{L}[x](s) = \mathcal{L}[10](s) + \mathcal{L}[\delta_2](s).$$

Indem wir auf der linken Seite den Ableitungssatz und auf der rechten Seite die Laplacetabelle nutzen, erhalten wir daraus

$$s\mathcal{L}[x](s) - x(0) - 5\mathcal{L}[x](s) = \frac{10}{s} + e^{-2s}.$$

Einarbeiten der Anfangsbedingung $x(0) = 4$ und Umstellen der Gleichung liefert dann

$$\mathcal{L}[x](s) = \frac{4}{s-5} + \frac{10}{s(s-5)} + e^{-2s}\frac{1}{s-5}.$$

Wegen

$$\frac{10}{s(s-5)} = \frac{2}{s-5} - \frac{2}{s}$$

lässt sich dies weiter vereinfachen zu

$$\mathcal{L}[x](s) = \frac{4}{s-5} + \frac{2}{s-5} - \frac{2}{s} + e^{-2s}\frac{1}{s-5}.$$

Eine Rücktransformation ergibt am Ende

$$x(t) = 6e^{5t} - 2 + u_2(t)e^{5(t-2)}.$$

Erläuterungen:

- Der Satz von Lerch ist hier nicht anwendbar, jedenfalls nicht bei $t = 2$, da die Sprungfunktion u_2 hier unstetig ist.

Aufgabe 6

(a) Setzen wir

$$y(x,t) = X(x)T(t)$$

in die Differentialgleicung ein, so erhalten wir

$$X(x)T'(t) - X'(x)T(t) + 8X(x)T(t) = 0.$$

Für $X(x)T(t) \neq 0$ ist dies gleichbedeutend mit

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X'(x)}{X(x)} - 8.$$

Da die linke Seite nur von t abhängt und die rechte nur von x, gilt

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \lambda = \frac{X'(x)}{X(x)} - 8$$

mit einem $\lambda \in \mathbb{R}$. Daraus ergeben sich die beiden gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$T'(t) = \lambda T(t)$$

und

$$X'(x) = (\lambda + 8)X(x).$$

Ihre allgemeinen Lösungen lauten

$$T(t) = Ce^{\lambda t}, \quad C \in \mathbb{R}$$

sowie

$$X(x) = Ce^{(\lambda+8)x}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Damit ist

$$y(x,t) = Ce^{\lambda t + (\lambda+8)x}, \quad C \in \mathbb{R}$$

(b) Indem wir einmal $\lambda = -7$ und $C = 4$ sowie einmal $\lambda = -5$ und $C = -2$ wählen, erhalten wir die beiden Lösungen

$$y_1(x,t) = 4e^{-7t+x}$$

und

$$y_2(x,t) = -2e^{-5t+3x}.$$

Nach dem Superpositionsprinzip ist auch

$$\begin{aligned} y(x,t) &= y_1(x,t) + y_2(x,t) \\ &= 4e^{-7t+x} - 2e^{-5t+3x} \end{aligned}$$

eine Lösung der Differentialgleichung. Ferner erfüllt diese offensichtlich die Anfangsbedingung

$$y(x,0) = 4e^{x} - 2e^{3x}.$$

Erläuterungen:

- Wählt man eine andere Separationskonstante, so erhält man

$$y(x,t) = Ce^{(\lambda-8)t+\lambda x}, \quad C \in \mathbb{R}$$

in (a) als Lösungen. Dies ist natürlich ebenfalls korrekt.

- Eine Superposition mittels Reihen etwa in der Form

  $$y(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k e^{\lambda_k t + (\lambda_k + 8)x}$$

  oder

  $$y(x,t) = \sum_{\lambda \in \mathbb{R}} C_\lambda e^{\lambda t + (\lambda + 8)x}$$

  ist hier nicht ohne weiteres möglich, da diese Reihen ohne zusätzliche (sehr starke) Bedingungen an die Koeffizienten C_K nicht konvergieren.

- *Endliche* Summenbildungen sind hingegen möglich.