Technische Universität Berlin

Fakultät II – Institut für Mathematik WS 16/17

G. Penn-Karras 9. März 2017

März – Klausur
Differentialgleichungen für Ingenieurwissenschaften

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Neben einem handbeschriebenen A4 Blatt mit Notizen ist nur die ausgegebene oder von der ISIS-Seite heruntergeladene Laplacetabelle zugelassen. Taschenrechner und Formelsammlungen sind nicht zugelassen. Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Geben Sie im Rechenteil immer den **vollständigen Rechenweg** und im Verständnisteil, wenn nichts anderes gesagt ist, immer eine **kurze Begründung** an.

Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**.

Die Gesamtklausur ist mit 30 von 60 Punkten bestanden, wenn in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens 10 Punkte erreicht werden.

Korrektur

1	2	3	Σ_R	4	5	6	Σ_V	Σ

Rechenteil

1. Aufgabe 9 Punkte

Ermitteln Sie im $\mathbb{R}^3$ die allgemeine reelle(!) Lösung $\vec{y}$ des Differentialgleichungssystems

$$\vec{y}\,'(t) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \vec{y}(t).$$

2. Aufgabe 10 Punkte

Ermitteln Sie mit Hilfe der Methode der Laplace-Transformation die Lösung für das Anfangswertsproblem

$$\ddot{x}(t) - x(t) = u_2(t), \qquad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 1.$$

Dabei steht $u_2(t)$ für die Sprungfunktion, die bei $t = 2$ von Null auf Eins springt.

3. Aufgabe 11 Punkte

Gegeben sei die partielle Differentialgleichung

$$4 \cdot \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = 0.$$

a) Finden Sie alle Lösungen $u(x,t)$ der Form $u(x,t) = X(x)T(t)$, bei denen die Funktion $X(x)$ periodisch und nicht-konstant ist.

b) Finden Sie alle Lösungen, die die Randbedingungen

$$u(0,t) = 0, \; u(\pi,t) = 0$$

erfüllen.

c) Ermitteln Sie durch Superposition eine Lösung, die zusätzlich zu den Randbedingungen aus Teil b) auch die Anfangsbedingung

$$u(x,0) = \sin(x) - \sin(2x)$$

erfüllt.

Bitte 2. Blatt beachten!

Verständnisteil

4. Aufgabe

9 Punkte

Gegeben sei das Differentialgleichungssystem

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

a) Wie muss a gewählt werden, damit $ax^2 + y^2$ eine Erhaltungsgröße ist?

b) Zeichnen Sie das Phasenporträt mit Phasenbahnen und Richtungspfeilen.

5. Aufgabe

9 Punkte

Ermitteln Sie die Gleichgewichtspunkte und deren Stabilitätsverhalten zu folgenden Differentialgleichungssystemen:

a)

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

b)

$$\dot{x} = x^2 - 1, \quad \dot{y} = -y + 1$$

6. Aufgabe

12 Punkte

a) Finden Sie eine (nur eine!) Lösung der skalaren Differentialgleichung

$$\ddot{x} + \dot{x} + x = te^{2t}.$$

b) Gegeben seien die folgenden beiden Anfangswertprobleme:

i)

$$y' = \cos(x)y^2, \quad y(1) = 0$$

ii)

$$y' = \cos(x)y^2, \quad y(0) = 1$$

Berechnen Sie die Lösungen der beiden Anfangswertprobleme und geben Sie jeweils den maximalem Definitionsbereich an. Warum gibt es nicht noch mehr Lösungen, als die von Ihnen angegebenen?