Musterlösung — DGL f. Ing., 9. März 2017

1. Aufgabe

9 Punkte

char. Polynom

$$(2-\lambda)(1-\lambda)(1-\lambda)+2-\lambda$$

Nullstellen

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 1+i, \quad \lambda_3 = 1-i$$

eine reelle Lösung:

$$e^{2t}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

eine komplexe Lösung:

$$e^{(1+i)t}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad e^{(1-i)t}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

Aufspaltung nach Real- und Imaginärteil:

$$e^{t}\begin{pmatrix} 0 \\ \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad e^{t}\begin{pmatrix} 0 \\ \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$c_1 e^{2t}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 e^{t}\begin{pmatrix} 0 \\ \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + c_3 e^{t}\begin{pmatrix} 0 \\ \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

2. Aufgabe

10 Punkte

Transformieren:

$$s^2X - s - 1 - X = \frac{1}{s}e^{-2s}$$

Umformung:

$$X(s) = \frac{1}{s-1} + \left(-\frac{1}{s} + \frac{0{,}5}{s+1} + \frac{0{,}5}{s-1}\right)e^{-2s}$$

Zurücktransformieren:

$$x(t) = e^{-t} + u_2(t)\left(-1 + \frac{1}{2}e^{2-t} + \frac{1}{2}e^{t-2}\right)$$

3. Aufgabe

11 Punkte

a) Ansatz:

$$4X''T = XT'$$

Umformung, Separationskonstante:

$$\frac{X''}{X} = \frac{T'}{4T} = \lambda$$

Zwei DGLn:

$$X'' - \lambda X = 0, \qquad T' - 4\lambda T = 0.$$

Separationskonstante muss für nicht-konstante periodische Lösung $X(x)$ negativ sein. Man setzt

$$\lambda = -\omega^2$$

Dann nämlich

$$X(x) = C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x.$$

Allgemeine Lösung von der Form

$$u(x,t) = (C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x)\mathrm{e}^{-4\omega^2 t}$$

b) Randbedingungen ergeben für $X(x)$:

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \Leftrightarrow X(0)T(t) = X(\pi)T(t) = 0 \Leftrightarrow X(0) = X(\pi) = 0.$$

Anpassung der allgemeinen Lösung:

$$X(0) = C_1 \stackrel{!}{=} 0 \implies C_1 = 0$$
$$X(\pi) = C_2 \sin \omega\pi \stackrel{!}{=} 0 \implies (C_2 = 0 \text{ oder } \sin \omega\pi = 0).$$

$C_1 = C_2 = 0$ liefert triviale Lösung. Also muss $\sin \frac{\omega}{2}\pi = 0$ erfüllt werden: $\omega \in \mathbb{N}$ $(\omega > 0)$. Wir ersetzen ω durch k mit $k \in \mathbb{N}$.

Somit allgemeine Lösung mit Randbedingungen:

$$u(x,t) = C\mathrm{e}^{-4k^2 t} \sin kx.$$

c) ARWP-Lösung:

$$u(x,t) = \sin(x)e^{-4t} - \sin(2x)e^{-16t}$$

4. Aufgabe

9 Punkte

a) Ansatz:

$$a\dot{x}2x + \dot{y}2y$$

einsetzen:

$$= 2axy - 4xy = 0$$

Lösung:

$$a = 2$$

b) Phasendiagramm:

- Achsenbeschriftung (x, y)
- Achsenbeschriftung der Schnittpunkte mit einer Phasenbahn, z.Bsp. bei $x = 1, y = \sqrt{2}$
- Pfeile an Phasenbahn
- geschlossene Ellipse wegen Erhaltungsgröße
- zweite geschlossene Ellipse

5. Aufgabe

9 Punkte

a) GGP bei

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dynamisches System ist linear. Zu betrachten ist also die Systemmatrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Eigenwerte sind $\lambda = \pm i$.

Realteil dieser Eigenwerte ist gleich 0.

Linearität des dynamischen Systems: Vergleich von algebraischer und geometrischer Vielfachheit fruchtbringend.

Beide Eigenwerte haben algebraische Vielfachheit 1 (geht im $\mathbb{R}^2$ nicht anders).

Geometrische Vielfachheit von jedem Eigenwert ist ebenfalls 1 (geht im $\mathbb{R}^2$ nicht anders).

Geometrische und algebraische Vielfachheit sind gleich.

Das System ist im angegebenen GGP

stabil aber nicht asymptotisch stabil

b) GGP bei

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dynamisches System ist nichtlinear. Allgemeine Ableitung ist

$$F'(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Einsetzen liefert:

$$F'(1,1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \implies \text{ein Eigenwert positiver Realteil} \implies \text{instabil}$$

und

$$F'(-1,1) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \implies \text{alle Eigenwerte negative Realteile} \implies \textit{asymptotisch stabil}$$

6. Aufgabe

12 Punkte

a) Ansatz vom Typ der rechten Seite:

$$ate^{2t} + be^{2t}$$

Die Rechnung

$$x = (at+b)e^{2t} \implies \dot{x} = (a + 2b + 2at)e^{2t} \implies \ddot{x} = (4at + 4a + 4b)e^{2t}$$

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \dot{x} + x = te^{2t} &\Leftrightarrow (4at + 4a + 4b + a + 2b + 2at + at + b)e^{2t} = te^{2t} \\ &\Leftrightarrow (7a = 1 \text{ und } 5a + 7b = 0) \end{aligned}$$

liefert die Koeffizienten

$$a = \frac{1}{7} \text{ und } b = -\frac{5}{49}$$

und damit *zum Beispiel* die Lösung:

$$x(t) = \left(\frac{1}{7}t - \frac{5}{49}\right) e^{2t}$$

b) Die $\mathbb{R}^2$-Funktion $cos(x)y^2$ ist stetig partiell differenzierbar auf ganz $\mathbb{R}^2$. Die Anfangspunkte $(1,0)$ und $(0,1)$ liegen in $\mathbb{R}^2$. Damit gibt es für jedes der beiden AWPe genau eine maximale Lösung.

$y(x) = 0$ mit maximalem Definitionsbereich $\mathbb{R}$

ii) Separationsansatz:

$$\int \left(-\frac{1}{y}\right)' dx = sin(x) + C$$

Allgemeine Lösung:

$$y(x) = -\frac{1}{\sin(x) + C}$$

Korrekte Lösung:

$$y(x) = \frac{1}{1 - \sin(x)}$$

mit Definitionsbereich

$$\left]-\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$