Berlin, 10. April 2017

Name: .... **Matr.-Nr.: ....**

Wiederholung der schriftlichen Prüfung zur Vorlesung Diskrete Strukturen

(Niedermeier/Molter/Froese, Wintersemester 2016/17)

Einlesezeit:	15 Minuten
Bearbeitungszeit:	60 Minuten
Max. Punktezahl:	50 Punkte

1	2	3	4	5	6	7	Σ
(4)	(4)	(6)	(6)	(10)	(11)	(9)	(50)

Allgemeine Hinweise:

- Es sind keinerlei Hilfsmittel erlaubt.
- Benutzen Sie keinen Bleistift, sondern einen Kugelschreiber in der Farbe **schwarz** oder **blau**.
- Beschriften Sie jedes Blatt mit Vor- und Nachnamen sowie Matrikelnummer.
- Bei allen Multiple-Choice-Fragen ist immer **mindestens eine** Antwort richtig. Bei Ankreuzen einer falschen Antwort gibt es für die jeweilige Aufgabe **0 Punkte**!
- Ein Graph ist, falls nicht explizit anders beschrieben, immer einfach, ungerichtet und ohne Schleifen.
- Auf Seite 7 finden Sie einige Sätze aus der Vorlesung, die Sie verwenden dürfen. Nicht aufgelistete Sätze und Korollare, die aus der Vorlesung bekannt sind, dürfen ebenfalls verwendet werden und müssen **nicht** erneut bewiesen werden.
- **Falls in der Aufgabenstellung nicht explizit ausgeschlossen, sind alle Antworten zu begründen! Antworten ohne Begründung erhalten 0 Punkte.**

Viel Erfolg!

Name: .... **Matr.-Nr.: ....**

Aufgabe 1: **Vermischtes Graphentheorie I** (4 Punkte)

Welche der folgenden Aussagen sind korrekt? Die Antwort muss nicht begründet werden.

- ☐ Es gibt einen Graph, der keinen planaren Teilgraphen enthält.
- ☐ Wenn ein Baum ein perfektes Matching enthält, so ist dies eindeutig.
- ☐ Der Vierfarbensatz war einer der ersten großen mathematischen Sätze, der mit Hilfe von Computern bewiesen wurde.
- ☐ Jeder 4-reguläre Graph enthält ein perfektes Matching.
- ☐ Es gibt einen planaren Graphen mit 7 Knoten und 16 Kanten.

Aufgabe 2: **Vermischtes Graphentheorie II** (4 Punkte)

Welche der folgenden Aussagen sind korrekt? Die Antwort muss nicht begründet werden.

- ☐ Der Komplementgraph eines nicht zusammenhängenden Graphen ist immer zusammenhängend.
- ☐ Es gibt einen Graphen mit Gradsequenz $(1, 2, 3, 4, 4)$.
- ☐ Jeder 2-reguläre Graph ist bipartit.
- ☐ Jeder 3-färbbare Graph (Knotenfärbung) ist planar.
- ☐ Jeder Baum ist 2-färbbar (Knotenfärbung).

Aufgabe 3: **Vermischtes Zahlentheorie** (6 Punkte)

Welche der folgenden Aussagen sind korrekt? Die Antwort muss nicht begründet werden.

- ☐ Das Produkt aus dem größten gemeinsamen Teiler und dem kleinsten gemeinsamen Vielfachen zweier positiver ganzer Zahlen ist gleich dem Produkt dieser beiden Zahlen.
- ☐ Der chinesische Restsatz wird dazu benutzt, die Primfaktorzerlegung einer natürlichen Zahl zu berechnen.
- ☐ Eine natürliche Zahl ist durch neun teilbar genau dann, wenn ihre Quersumme durch neun teilbar ist.
- ☐ Für jede natürliche Zahl $n \geq 2$ gilt: n und $n + 1$ sind relativ prim.
- ☐ Es gibt eine größte Primzahl.
- ☐ Das RSA-Verfahren benutzt immer den gleichen Schlüssel zum Ver- und Entschlüsseln.

Name: .... **Matr.-Nr.: ....**

Aufgabe 4: **Bäume** (4+2 Punkte)

a) Sei $G = (V, E)$ ein Baum. Beweisen Sie, dass weniger als die Hälfte aller Knoten von G einen Grad größer oder gleich drei haben. Das heißt, beweisen Sie die Ungleichung

$$|\{v \in V \mid \deg_G(v) \geq 3\}| < |V|/2.$$

b) Zeichnen Sie einen Baum mit acht Knoten, von denen mindestens drei Knoten jeweils einen Grad größer oder gleich drei haben, oder beweisen Sie, dass es keinen solchen Baum gibt.

Name: .... **Matr.-Nr.: ....**

Aufgabe 5: **Isomorphe Komplementgraphen** (3+3+4 Punkte)

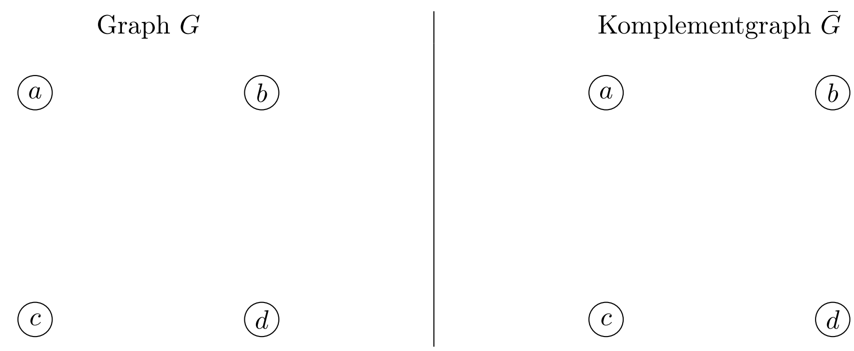
Der *Komplementgraph* eines Graphen $G = (V, E)$ ist der Graph $\bar{G} = (V, \bar{E})$ mit

$$\bar{E} = \{\{v, w\} \mid v, w \in V \land v \neq w \land \{v, w\} \notin E\},$$

d.h. $\bar{G}$ enthält eine Kante zwischen zwei Knoten genau dann, wenn diese Kante in G nicht existiert.

Zwei Graphen $G = (V, E)$ und $G' = (V', E')$ heißen *isomorph* falls es eine bijektive Funktion $f : V \to V'$ gibt, sodass für alle $v, w \in V$ mit $v \neq w$ gilt, dass $\{v, w\} \in E$ gdw. $\{f(v), f(w)\} \in E'$.

a) Geben Sie einen Graphen G und seinen Komplementgraphen $\bar{G}$ mit vier Knoten an, sodass G zu $\bar{G}$ isomorph ist (ohne Begründung).



b) Beweisen Sie, warum es keinen Graphen mit drei Knoten gibt, der isomorph zu seinem Komplementgraphen ist.

c) Beweisen Sie, dass für jeden Graphen $G = (V, E)$, der isomporph zu seinem Komplementgraphen $\bar{G}$ ist, gilt, dass $|V| \equiv 0 \pmod 4$ oder $|V| \equiv 1 \pmod 4$.

Name: .... **Matr.-Nr.: ....**

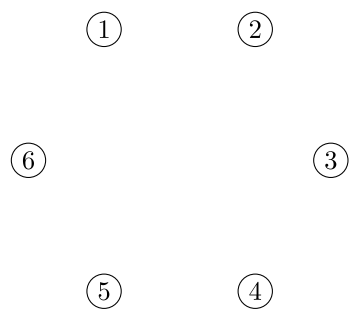
Aufgabe 6: **Planare Graphen** (2+3+4+2 Punkte)

Ein *ebener* Graph ist ein planarer Graph zusammen mit seiner Darstellung in der Ebene. Dabei muss eine Kante **nicht** unbedingt als eine gerade Linie gezeichnet werden.

Ein Graph $G = (V, E)$ hat eine *unabhängige Knotenmenge* $X \subseteq V$, wenn für alle $v, w \in X$ gilt, dass $\{v, w\} \notin E$.

Ein *k-regulärer* Graph ist ein Graph bei dem der Knotengrad jedes Knotens genau k ist.

a) Zeichnen Sie einen 4-regulären ebenen Graphen mit sechs Knoten.



b) Zeigen Sie, dass es keinen 6-regulären planaren Graphen gibt.

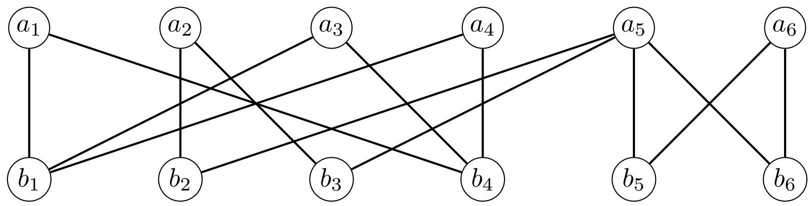
c) Zeigen Sie, dass jeder planare Graph $G = (V, E)$ eine unabhängige Knotenmenge $X \subseteq V$ mit $|X| \geq |V|/6$ besitzt, ohne dabei den Vierfarbensatz zu verwenden.

d) Was können Sie mit Hilfe des Vierfarbensatzes über die Größe der größten unabhängigen Knotenmenge $|X|$ in einem planaren Graphen aussagen? Begründen Sie Ihre Aussage.

Name: .... **Matr.-Nr.: ....**

Aufgabe 7: **Matchings** (3+3+3 Punkte)

a) Geben Sie ein perfektes Matching für den folgenden Graphen an oder beweisen Sie, dass es keines gibt.



b) Beweisen Sie, dass jeder Graph $G = (V, E)$ ein Matching M enthält, für das gilt

$$|M| \geq |E|/(\Delta(G) + 1),$$

wobei $\Delta(G)$ der Maximalgrad von Graph G ist.

c) Zeigen Sie, dass ein vollständiger Graph mit $2n$ Knoten $\frac{(2n)!}{2^n n!}$ perfekte Matchings enthält.

Sätze aus der Vorlesung

Satz 1 („Handshaking-Theorem").
Für jeden Graphen $G = (V, E)$ gilt $\sum_{v \in V} \deg_G(v) = 2 \cdot |E|$.

Satz 2 („Satz von Ore").
Erfüllt ein Graph $G = (V, E)$ die Bedingung

$$\forall x, y \in V, x \neq y, \{x, y\} \notin E\colon\ \deg_G(x) + \deg_G(y) \geq |V|,$$

so enthält G einen Hamiltonkreis.

Satz 3 („Satz von Euler").
Ein zusammenhängender Graph $G = (V, E)$ ist eulersch $\Leftrightarrow$ der Grad aller Knoten ist gerade.

Satz 4 („Eulersche Polyederformel").
Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender, ebener Graph. Dann gilt $\#\text{Gebiete} = |E| - |V| + 2$.

Korollar 5 (zu „Eulersche Polyederformel").
Für jeden planaren Graphen $G = (V, E)$ mit $|V| \geq 3$ gilt

$$|E| \leq 3 \cdot |V| - 6.$$

Satz 6 („Satz von Kuratowski").
Ein Graph ist planar gdw. er keinen Teilgraphen enthält, der homöomorph zu $K_{3,3}$ oder K_5 ist.

Satz 7 („Vierfarbensatz").
Für jeden planaren Graphen ist $\chi(G) \leq 4$.

Satz 8 („Satz von Vizing").
Es gibt einen effizienten Algorithmus, der für einen Graphen $G = (V, E)$ eine Kantenfärbung mit entweder $\Delta(G)$ oder $\Delta(G) + 1$ Farben liefert.

Satz 9 („Satz von Hall").
Für einen bipartiten Graphen $G = (A \uplus B, E)$ gilt:

$$G \text{ hat ein Matching } M \text{ der Kardinalität } |M| = |A|$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\forall X \subseteq A\colon |N(X)| \geq |X|.$$