

Name: .....

Matr.-Nr.: .....

**Klausur: Diskrete Strukturen**

(Nichterlein/Herrmann/Schröder/Tadewaldt, Sommersemester 2026)

Bearbeitungszeit: 120 Minuten  
 Punktzahl zum Bestehen: 50 Punkte

|                 |    |    |    |    |    |    |    |    |              |
|-----------------|----|----|----|----|----|----|----|----|--------------|
| Aufgabe Nr.:    | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | <b>Summe</b> |
| Punktzahl:      | 15 | 19 | 12 | 18 | 16 | 15 | 15 | 10 | 120          |
| Davon erreicht: |    |    |    |    |    |    |    |    |              |

**Allgemeine Hinweise:**

- Es sind keinerlei Hilfsmittel erlaubt.
- Benutzen Sie einen dokumentenechten Stift in der Farbe schwarz oder blau. Insbesondere also keinen Bleistift, sondern einen Kugelschreiber.
- Beschriften Sie jedes Blatt mit ihrem Vor- und Nachnamen und ihrer Matrikelnummer.
- **Falls es in der Aufgabenstellung nicht explizit ausgeschlossen wird, so sind alle Antworten zu begründen! Antworten ohne Begründung erhalten 0 Punkte.**
- Sie dürfen alle Sätze aus den Vorlesungsfolien (einige sind am Ende der Klausur aufgelistet) als bekannt annehmen, es sei denn der Beweis einer solchen Aussage ist explizit gefordert.

**Viel Erfolg!**

*Hinweise:* Die Anzahl der Möglichkeiten beim Auswählen von  $k$  Elementen aus einer Menge mit  $n$  Elementen ist:

|                  | Reihenfolge wichtig<br>(geordnet)            | Reihenfolge nicht wichtig<br>(ungeordnet) |
|------------------|----------------------------------------------|-------------------------------------------|
| Mit Zurücklegen  | $n^k$                                        | $\binom{k+n-1}{k}$                        |
| Ohne Zurücklegen | $n^{\underline{k}} := \binom{n}{k} \cdot k!$ | $\binom{n}{k}$                            |

Aufgabe 1: **Zählen mit Mengen**

(15 Punkte)

Sei  $M$  eine Menge mit  $|M| = 44$ .

Bestimmen Sie für jede der Teilaufgaben jeweils die korrekte Antwort unter den folgenden Antwortmöglichkeiten. Begründen Sie ihre Antworten!

- |                                |                                                |                                           |                                                     |                                                 |
|--------------------------------|------------------------------------------------|-------------------------------------------|-----------------------------------------------------|-------------------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> $44!$ | <input type="checkbox"/> $43! - 42!$           | <input type="checkbox"/> $42^{44}$        | <input type="checkbox"/> $\binom{44}{42} \cdot 42!$ | <input type="checkbox"/> $2^{44+\binom{44}{2}}$ |
| <input type="checkbox"/> $43!$ | <input type="checkbox"/> $43! + 42!$           | <input type="checkbox"/> $\binom{44}{42}$ | <input type="checkbox"/> $C_{44}$                   | <input type="checkbox"/> $2^{44^2}$             |
| <input type="checkbox"/> $42!$ | <input type="checkbox"/> $S_{44,42} \cdot 42!$ | <input type="checkbox"/> $s_{44,43}$      | <input type="checkbox"/> $2^{44} 3^{\binom{44}{2}}$ |                                                 |

- (a) Bestimmen Sie die Anzahl an Permutationen von  $M$  die genau aus einem Zyklus der Länge 44 bestehen. (4 P)
- (b) Sei  $|Y| = 42$ .
- Wie viele Abbildungen  $f: M \rightarrow Y$  gibt es? (3 P)
  - Wie viele davon sind surjektiv? (4 P)
- (c) Bestimmen Sie die Anzahl an antisymmetrischen Relationen über  $M$ . (4 P)

*Hinweise/Definitionen:*

- Eine *Permutation* von  $M$  ist eine bijektive Abbildung  $f: M \rightarrow M$ .
- Ein *Zyklus* von  $f$  ist eine Folge  $(i_1 i_2 i_3 \dots i_t)$  verschiedener Elemente aus  $M$ , sodass  $f(i_j) = i_{j+1}$ , für alle  $1 \leq j < t$  und  $f(i_t) = i_1$  gilt.  $t$  ist die *Länge* des Zyklus.
- Eine Abbildung  $f: A \rightarrow B$  ist *surjektiv*, wenn für jedes  $b \in B$  ein  $a \in A$  existiert, sodass  $f(a) = b$ .
- Eine Relation  $R$  über  $M$  heißt *antisymmetrisch* wenn aus  $a \neq b$  und  $(a, b) \in R$  folgt dass  $(b, a) \notin R$ .
- Die Catalan-Zahlen sind definiert durch  $C_0 = 1$  und für  $n > 0$ :  $C_n = \sum_{k=1}^n C_{k-1} C_{n-k}$ .
- Die Zahl der Permutationen einer  $n$ -elementigen Menge mit genau  $k$  Zyklen wird als  $s_{n,k}$  bezeichnet (Stirling-Zahlen erster Art).
- Die Zahl der Partitionen einer Menge mit  $n$  Elementen in  $k$  nicht-leere Mengen wird als  $S_{n,k}$  bezeichnet (Stirling-Zahlen zweiter Art).

**Name:** .....

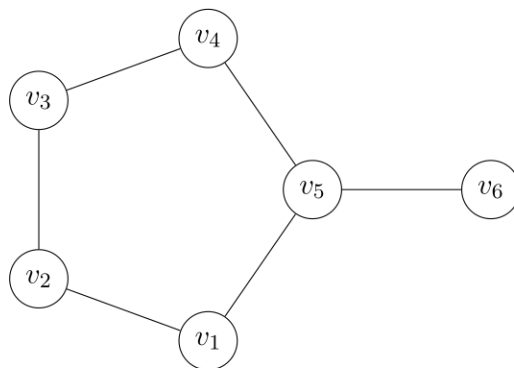
**Matr.-Nr.:** .....

*(Leere Seite für Notizen oder Ähnliches; bei Lösungen bitte zugehörige Aufgabe klar kennzeichnen!)*

## Aufgabe 2: Zählen in Graphen

(19 Punkte)

Sei  $G$  der folgende Graph:



- (a) Bestimmen Sie jeweils die Anzahl an *aufspannenden* Teilgraphen von  $G$ , die
- i. zusammenhängend sind. (3 P)
  - ii. genau vier Kanten enthalten. (3 P)
  - iii. ein perfektes Matching enthalten. (3 P)
- Begründen Sie Ihre Antworten!
- (b) Bestimmen Sie die Anzahl an aufspannenden Teilgraphen von  $G$ , die mindestens eine der drei Bedingungen aus Teilaufgabe (a) erfüllen. Begründen Sie Ihre Antwort! (10 P)
- Hinweis:* Sie dürfen die Ergebnisse aus (a) als  $A_i$ ,  $A_{ii}$  und  $A_{iii}$  verwenden auch wenn sie (a) nicht vollständig bearbeitet haben.

*Hinweise/Definitionen:*

- Ein Teilgraph  $H$  von  $G$  heißt *aufspannend* falls  $V(H) = V(G)$  gilt.
- Ein *Matching* in einem Graph  $G$  ist eine Menge  $M \subseteq E(G)$  von Kanten, sodass  $e \cap f = \emptyset$  für alle  $e \neq f \in M$ .
- Ein Matching  $M$  heißt *perfekt* wenn jeder Knoten inzident zu einer Kante aus  $M$  ist.

**Name:** .....

**Matr.-Nr.:** .....

*(Leere Seite für Notizen oder Ähnliches; bei Lösungen bitte zugehörige Aufgabe klar kennzeichnen!)*

Aufgabe 3: **Bäume**

(12 Punkte)

Beweisen Sie folgende Aussage. Ein Baum mit  $n > 0$  Knoten hat  $n - 1$  Kanten.

*Hinweis:* Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass ein Baum mit zwei oder mehr Knoten mindestens einen Knoten von Grad eins hat.

*Hinweise/Definitionen:* Ein *Baum* ist ein zusammenhängender azyklischer Graph.

**Name:** .....

**Matr.-Nr.:** .....

*(Leere Seite für Notizen oder Ähnliches; bei Lösungen bitte zugehörige Aufgabe klar kennzeichnen!)*

Aufgabe 4: **Zeigen oder Widerlegen**

(18 Punkte)

Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

- (a) Ein ungerichteter Graph  $G$  ist genau dann ein Baum, wenn jeder Knoten  $v \in V(G)$  mit  $\deg_G(v) \geq 2$  ein Schnittknoten ist. (6 P)
- (b) Jeder Graph mit Euler-Tour besitzt auch einen Hamilton-Kreis. (6 P)
- (c) Jeder planare Graph mit 17 Knoten enthält eine unabhängige Menge der Größe 5. (6 P)

*Hinweise/Definitionen:*

- In einem zusammenhängenden Graphen  $G$  ist ein Knoten  $v \in V(G)$  ein *Schnittknoten*, wenn  $G - v$  nicht zusammenhängend ist.
- Ein Knoten  $v$  ist ein Schnittknoten von  $G$ , wenn  $v$  ein Schnittknoten einer Zusammenhangskomponente von  $G$  ist.
- Eine *Euler-Tour* ist ein geschlossener Kantenzug, der jede Kante genau einmal durchläuft.
- Ein *Hamilton-Kreis* ist ein Kreis, der jeden Knoten enthält.
- Eine Einbettung/Zeichnung  $\pi$  von  $G$  heißt *eben* wenn es keine Kanten  $e \neq f \in E(G)$  gibt, sodass  $\pi(e)$  und  $\pi(f)$  einen gemeinsamen Punkt haben der kein gemeinsamer Endpunkt ist.
- Ein Graph heißt *planar*, wenn er eine ebene Einbettung hat.
- Eine Knotenmenge heißt *unabhängig* falls keine Kante zwischen zwei Knoten aus dieser Menge existiert.



**Name:** .....

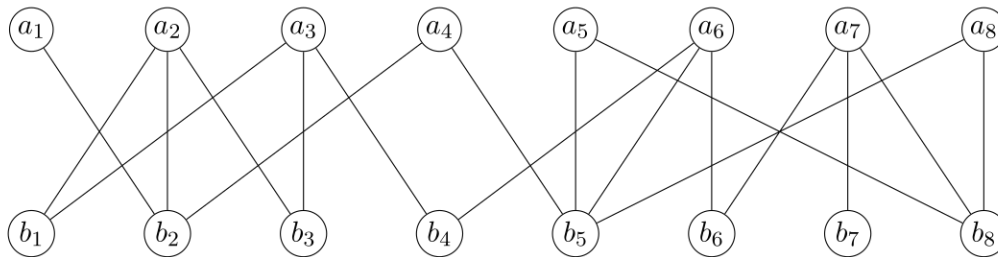
**Matr.-Nr.:** .....

*(Leere Seite für Notizen oder Ähnliches; bei Lösungen bitte zugehörige Aufgabe klar kennzeichnen!)*

# Aufgabe 5: Graph

(16 Punkte)

Sei  $G$  der folgende Graph:



- (a) Zeigen Sie, dass  $G$  kein perfektes Matching enthält. (5 P)
- (b) Zeigen Sie, dass der Graph  $G'' := (V(G), E(G) \cup \{\{a_1, b_1\}, \{a_1, b_3\}\})$  nicht planar ist. (5 P)

Sei  $G'$  der Graph den man erhält wenn man die Kante  $\{a_1, a_5\}$  zu  $G$  hinzufügt.

- (c) Zeigen oder widerlegen Sie:  $G'$  ist bipartit. (3 P)
- (d) Zeigen oder widerlegen Sie:  $G'$  enthält ein perfektes Matching. (3 P)
- Hinweis:* Sie dürfen die Aussage aus Teilaufgabe (a) verwenden.

*Hinweise/Definitionen:*

- Ein *Matching* in einem Graph  $G$  ist eine Menge  $M \subseteq E(G)$  von Kanten, sodass  $e \cap f = \emptyset$  für alle  $e \neq f \in M$ .
- Ein Matching  $M$  heißt *perfekt* wenn jeder Knoten inzident zu einer Kante aus  $M$  ist.
- Ein Graph  $G$  heißt *bipartit*, wenn  $V(G)$  in zwei disjunkte Teilmengen  $V(G) = A \dot{\cup} B$  zerlegt werden kann, sodass für alle  $e \in E(G)$  gilt:  $e \cap A \neq \emptyset$  und  $e \cap B \neq \emptyset$ .
- Eine Einbettung/Zeichnung  $\pi$  von  $G$  heißt *eben* wenn es keine Kanten  $e \neq f \in E(G)$  gibt, sodass  $\pi(e)$  und  $\pi(f)$  einen gemeinsamen Punkt haben der kein gemeinsamer Endpunkt ist.
- Ein Graph heißt *planar*, wenn er eine ebene Einbettung hat.

**Name:** .....

**Matr.-Nr.:** .....

*(Leere Seite für Notizen oder Ähnliches; bei Lösungen bitte zugehörige Aufgabe klar kennzeichnen!)*

Aufgabe 6: **Teilbarkeit und Teiler**

(15 Punkte)

- (a) Was ist  $\text{ggT}(312321354353543, 44684684353213)$ ? (**Ohne Begründung.**)

(3 P)

☐ 1

☐ 2

☐ 42

☐ 100

- (b) Bestimmen Sie  $10^n \bmod 8$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Begründen Sie Ihre Antwort!

(6 P)

- (c) Für jede natürliche Zahl  $x \in \mathbb{N}, x \geq 100$ , definieren wir  $pr(x)$  als diejenige Zahl, die aus den letzten drei Ziffern von  $x$  (in ihrer unveränderten Reihenfolge) besteht.

(6 P)

Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussage: 8 teilt  $x$  genau dann, wenn 8 auch  $pr(x)$  teilt.

*Hinweise/Definitionen:* Seien  $a, b \in \mathbb{Z}$ .

- $a$  teilt  $b$ , geschrieben  $a \mid b$ , wenn es ein  $k \in \mathbb{Z}$  gibt mit  $k \cdot a = b$ .
- $\text{ggT}(a, b)$  bezeichnet den größten gemeinsamen Teiler von  $a$  und  $b$ , d.h.,  
 $\text{ggT}(a, b) := \max\{k \in \mathbb{N} : k \text{ teilt } a \text{ und } k \text{ teilt } b\}$ .
- Die Modulooperation ist als Rest der Division definiert.

D.h.,  $a \bmod b$  ist diejenige Zahl  $b > r \geq 0$ , für die  $a = qb + r$  für ein  $q \in \mathbb{Z}$  gilt.

Für alle  $a, b, m \in \mathbb{Z}$  mit  $m \geq 2$  gilt

$$(a + b) \bmod m = ((a \bmod m) + (b \bmod m)) \bmod m$$

und

$$(a \cdot b) \bmod m = ((a \bmod m) \cdot (b \bmod m)) \bmod m.$$

**Name:** .....

**Matr.-Nr.:** .....

*(Leere Seite für Notizen oder Ähnliches; bei Lösungen bitte zugehörige Aufgabe klar kennzeichnen!)*

Aufgabe 7: **Algebra**

(15 Punkte)

- (a) Kreuzen Sie genau die Kombinationen aus Menge und Operation an, die ein Monoid ergeben: (10 P)  
(Ohne Begründung.)

|                              | min                      | max                      | +                        | ·                        | −                        |
|------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| $\mathbb{Z}$                 | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| $\mathbb{N}$                 | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$    | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| $\mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$ | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

*Hinweise:* Es gibt 0,5 Punkte pro Kästchen (unabhängig von den anderen Antworten).

Das Kästchen oben links beschreibt  $(\mathbb{Z}, \min)$ , das Kästchen unten rechts  $(\mathbb{Z}_3, -)$ .

Die Operationen  $\min$ ,  $\max$ ,  $+$ ,  $\cdot$ ,  $-$  sind in allen Fällen die bekannten Operationen auf  $\mathbb{Z}$ , d.h.  $3 \cdot 4 = 12$  gilt in allen Fällen.

- (b) Sei  $M$  eine beliebige Menge. Wir definieren den Operator  $==$  durch (5 P)

$$(a == b) := \begin{cases} 1, & \text{falls } a = b \\ 0, & \text{falls } a \neq b \end{cases}$$

Begründen Sie jeweils, ob  $(\mathbb{N}, ==)$  eine Algebra, ein Monoid oder eine Gruppe ist.

*Hinweise/Definitionen:*

- Sei  $S$  eine Menge. Ein *Operator auf  $S$*  ist eine Abbildung  $f : S^m \rightarrow S$ .
- Eine *Algebra*  $(S, f_1, \dots, f_t)$  besteht aus einer nicht-leeren Menge  $S$  sowie Operatoren  $f_1, \dots, f_t$  auf  $S$ .
- Sei  $\mathcal{A} = (S, \circ)$  eine Algebra mit  $\circ : S^2 \rightarrow S$ .
  1.  $\mathcal{A}$  heißt *Monoid*, wenn  $\circ$  assoziativ ist und ein neutrales Element  $e \in S$  existiert.
  2. Ist  $\mathcal{A}$  ein Monoid in dem jedes Element  $a \in S$  ein inverses Element besitzt, dann heißt  $\mathcal{A}$  *Gruppe*.
- Ein Operator  $\circ$  auf  $S$  ist *assoziativ*, wenn  $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$  für alle  $a, b, c \in S$ .

**Name:** .....

**Matr.-Nr.:** .....

*(Leere Seite für Notizen oder Ähnliches; bei Lösungen bitte zugehörige Aufgabe klar kennzeichnen!)*

Aufgabe 8: **Algebra**

(10 Punkte)

Sei  $(M, \circ)$  ein Monoid und  $\sim$  eine Kongruenzrelation auf  $(M, \circ)$ . Sei  $(M_\sim, \circ_\sim)$  das Quotientenmonoid von  $(M, \circ)$  bzgl.  $\sim$ .

Wir definieren die Funktion  $f: M \rightarrow M_\sim$  durch  $f(a) := [a]_\sim$ .

- (a) Zeigen oder widerlegen Sie:  $f$  ist ein Homomorphismus von  $(M, \circ)$  nach  $(M_\sim, \circ_\sim)$ . (5 P)
- (b) Geben Sie **ohne Begründung** eine explizite Kongruenzrelation  $\sim$  auf  $(M, \circ)$  an, sodass  $f$  ein Isomorphismus ist. (5 P)

*Hinweise/Definitionen:*

- Sei  $M$  eine Menge. Eine *Äquivalenzrelation* über  $M$  ist eine *reflexive, transitive* und *symmetrische* Relation  $\sim \subseteq M \times M$ .
- Sei  $\sim$  eine Äquivalenzrelation über einer Menge  $M$ . Für  $u \in M$  definieren wir die *Äquivalenzklasse* von  $u$  bzgl.  $\sim$  als  $[u]_\sim := \{v \in M : (u, v) \in \sim\}$ .
- Sei  $(M, \circ)$  ein Monoid und  $\sim$  eine Äquivalenzrelation auf  $M$ .  
Die Relation  $\sim$  heißt *verträglich* mit der Monoidoperation  $\circ$ , wenn für alle  $a, a', b, b' \in M$  gilt: Wenn  $a \sim b$  und  $a' \sim b'$ , dann auch  $a \circ a' \sim b \circ b'$ .  
Eine *Kongruenzrelation*  $\sim$  auf  $(M, \circ)$  ist eine Äquivalenzrelation auf  $M$ , die mit  $\circ$  verträglich ist.
- Seien  $(N, \circ)$  und  $(M, \cdot)$  Monoide. Eine Abbildung  $h: N \rightarrow M$  heißt *Homomorphismus* von  $(N, \circ)$  nach  $(M, \cdot)$ , wenn für alle  $a, b \in N$  gilt:  $h(a \circ b) = h(a) \cdot h(b)$ . Ist  $h$  auch bijektiv, so heißt  $h$  *Isomorphismus*.
- Sei  $(M, \circ)$  ein Monoid und  $\sim$  eine Kongruenzrelation auf  $M$ .
  - Die *Quotientenmenge* von  $M$  und  $\sim$  ist die Menge  $M_\sim := \{[a]_\sim : a \in M\}$ .
  - Das *Quotientenmonoid* ist das Monoid  $(M_\sim, \circ_\sim)$ , wobei  $[a]_\sim \circ_\sim [b]_\sim := [a \circ b]_\sim$ .



**Name:** .....

**Matr.-Nr.:** .....

*(Leere Seite für Notizen oder Ähnliches; bei Lösungen bitte zugehörige Aufgabe klar kennzeichnen!)*

## Theoreme und Lemmata aus der Vorlesung

(Diese dürfen ohne Beweis genutzt werden.)

**Theorem 1** (Inklusion-Exklusion). Seien  $A_1, \dots, A_n$  endliche Mengen. Es gilt

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{r=1}^n ((-1)^{r-1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq n} \left| \bigcap_{j=1}^r A_{i_j} \right|).$$

**Theorem 2** (Schubfachprinzip). Wird eine Menge  $X$  mit  $> r \cdot s$  Elementen in  $r$  Klassen partitioniert, dann enthält mindestens eine Klasse mindestens  $s + 1$  Elemente.

**Theorem 3** (Handshaking Lemma). Für jeden Graphen  $G$  gilt

$$\sum_{v \in V(G)} \deg_G(v) = 2 \cdot \|G\| = 2 \cdot |E(G)|.$$

**Theorem 4** (Menger). Sei  $G$  ein Graph und seien  $A, B \subseteq V(G)$ . Die minimale Zahl von Knoten, die  $A$  und  $B$  voneinander trennen, ist gleich der maximalen Anzahl knoten-disjunkter  $A$ – $B$ -Pfade in  $G$ .

**Lemma 5**. Ein Graph  $G$  ist genau dann bipartit, wenn  $G$  keinen Kreis ungerader Länge als Teilgraph enthält.

**Theorem 6** (König). Die maximale Größe eines Matchings in einem bipartiten Graph  $G$  ist gleich der minimalen Größe eines Vertex Covers in  $G$ .

**Theorem 7** (Hall). Ein bipartiter Graph  $G := (A \dot{\cup} B, E)$  enthält ein Matching von  $A$  genau dann, wenn  $|N(S)| \geq |S|$  für alle  $S \subseteq A$ .

**Theorem 8** (Eulersche Polyederformel). Sei  $G$  ein zusammenhängender planarer Graph und sei  $\pi$  eine ebene Zeichnung von  $G$  in  $\mathbb{R}^2$ . Sei  $F$  die Menge der Gebiete von  $\pi$ . Dann gilt  $|F| = |E(G)| - |V(G)| + 2$ .

**Korollar 9**. Für jeden planaren Graphen  $G$  mit  $|V(G)| \geq 3$  gilt  $|E(G)| \leq 3|V(G)| - 6$ .

**Theorem 10** (Kuratowski). Ein Graph  $G$  ist genau dann planar, wenn er weder eine Unterteilung von  $K_5$  noch von  $K_{3,3}$  als Teilgraph enthält.

**Theorem 11** (Appel und Haken). Jeder planare Graph ist 4-färbbar.

**Theorem 12** (Fundamentalsatz der Arithmetik). Jede Zahl  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n \geq 2$  lässt sich eindeutig als Produkt von Primzahlen darstellen:  $n = p_1^{e_1} \cdot p_2^{e_2} \cdot \dots \cdot p_k^{e_k}$  wobei  $p_1 < p_2 < \dots < p_k$  Primzahlen sind und  $e_1, e_2, \dots, e_k \in \mathbb{N}^+$ .

**Theorem 13** (Primzahlensatz). Für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt  $\pi(n) = (1 + o(1)) \cdot \frac{n}{\ln(n)}$ .

**Theorem 14** (Chinesischer Restsatz). Seien  $b_1, \dots, b_k, m_1, \dots, m_k \in \mathbb{N}$  mit  $\text{ggT}(m_i, m_j) = 1$  für alle  $1 \leq i < j \leq k$ . Dann gibt es genau ein  $x \in \mathbb{Z}_m$ , wobei  $m := m_1 \cdot \dots \cdot m_k$ , mit  $x \equiv b_i \pmod{m_i}$  für alle  $1 \leq i \leq k$ .

**Theorem 15** (kleiner Satz von Fermat). Für alle  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n \geq 2$  gilt:  $n$  ist eine Primzahl gdw.  $a^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$  für alle  $a \in \mathbb{Z}_n \setminus \{0\}$ .

**Theorem 16** (Euler). Für alle  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n \geq 2$  gilt  $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$  für alle  $a \in \mathbb{Z}_n^*$ .

**Theorem 17** (Dilworth.). Sei  $(M, \sqsubseteq)$  ein poset wobei  $M$  endlich ist. Die maximale Länge  $r$  einer Antikette in  $(M, \sqsubseteq)$  ist gleich der minimalen Größe  $k$  einer Überdeckung von  $(M, \sqsubseteq)$  durch Ketten.