1. Klausur
Elektrische Netzwerke Musterklausur
06. Juli 2009

Name: ....

Vorname: ....

Matr.-Nr.: ....

Bearbeitungszeit: 135 Minuten

- Trennen Sie den Aufgabensatz **nicht** auf.
- Benutzen Sie für die Lösung der Aufgaben **nur** das mit diesem Deckblatt ausgeteilte Papier. **Lösungen, die auf anderem Papier geschrieben werden, können nicht gewertet werden.** Weiteres Papier kann bei den Tutoren angefordert werden.
- **Notieren Sie bei der Aufgabe einen Hinweis, wenn die Lösung auf einem Extrablatt fortgesetzt wird**
- **Schreiben Sie deutlich!** Doppelte, unleserliche oder mehrdeutige Lösungen können nicht gewertet werden.
- Schreiben Sie **nicht** mit Bleistift!
- Schreiben Sie nur in **blau** oder **schwarz**!

Bewertung

Aufgabe	Punkte	erreicht
1	15	
2	15	
3	15	
4	15	
5	15	
6	15	

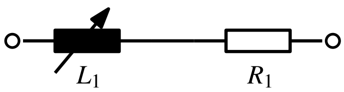
1. Aufgabe (15 Punkte): Fragen zur Vorlesung

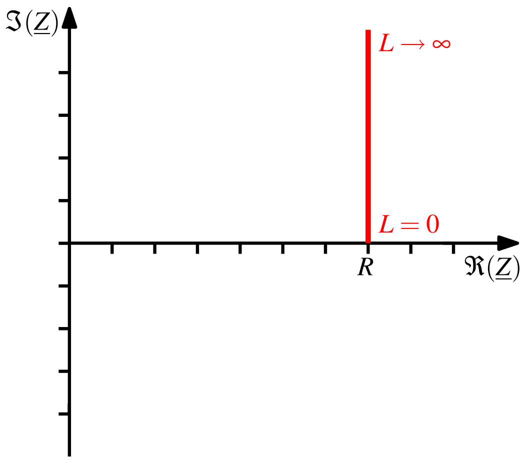
1.1. Begriff Ortskurve (2 Punkte) Erklären Sie stichpunktartig, was man unter dem Begriff *Ortskurve* versteht und welche Voraussetzungen zu deren Verwendung erfüllt sein müssen.

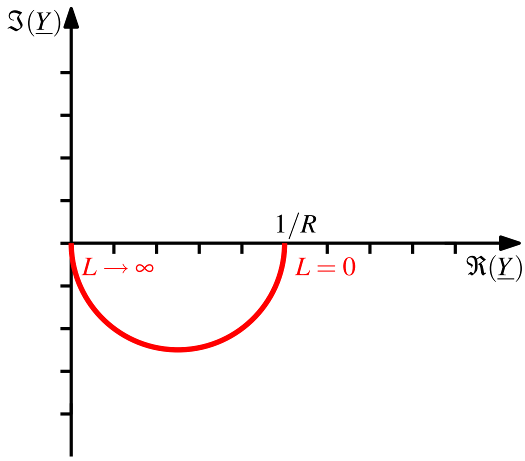
Lösung:

- *Ortskurven sind die Spitzen von Zeigern in der komplexen Ebene bei Variation eines reellen Parameters.*
- *Voraussetzungen sind lineare Bauelemente und das Erreichen des eingeschwungenen Zustandes*

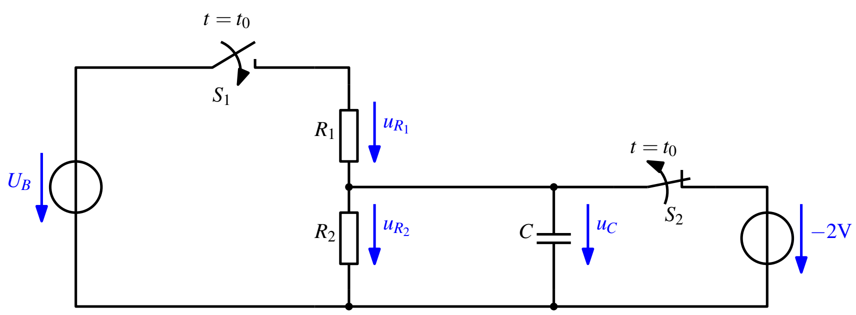
1.2. Ortskurve (2 Punkte) Zeichnen Sie den Verlauf der Ortskurve für *Impedanz* und *Admittanz* der RL-Reihenschaltung in Abhängigkeit des Parameters L in die vorbereiteten Diagramme ein. ω sei konstant. Markieren Sie die Punkte $L = 0$ und $L \to \infty$ in beiden Ortskurven!

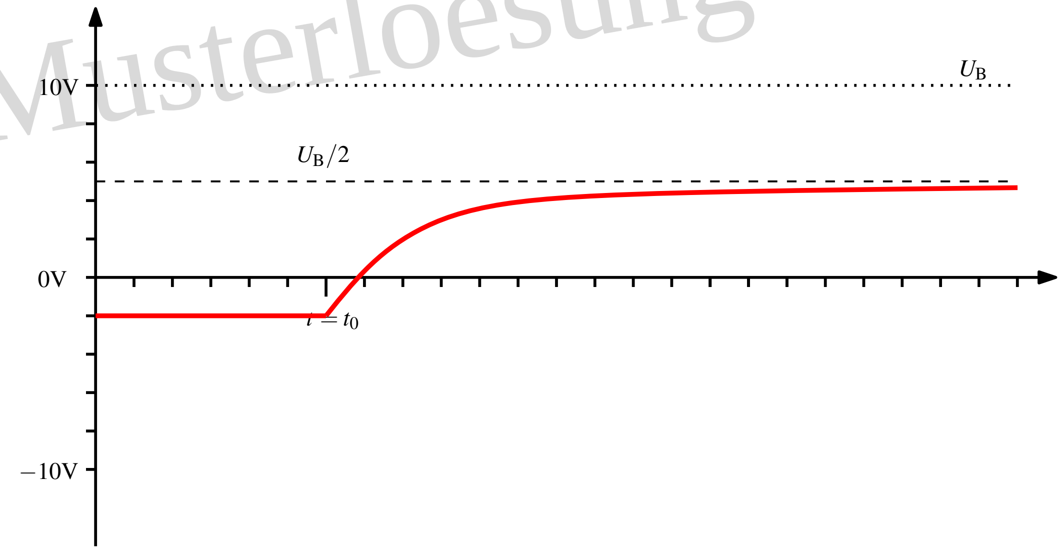






1.3. Ausgleichsvorgang (2 Punkte) Skizzieren Sie den Verlauf der Kondensatorspannung $u_C(t)$, wenn der Schalter S_1 zur Zeit $t = t_0$ geschlossen und der Schalter S_2 gleichzeitig geöffnet wird. Es gilt $R_1 = R_2$, $U_B = 10\text{V}$ und $u_C(t < t_0) = -2\text{V}$.



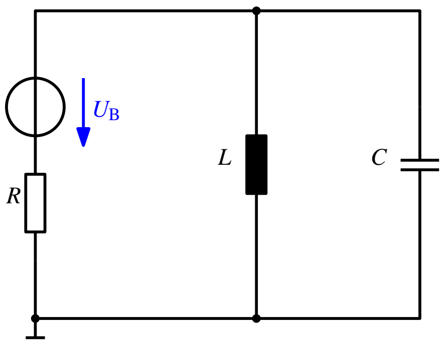


1.4. Generator im Verbraucherzählpfeilsystem (1 Punkt) Was gilt für die Leistung an einem Generator im *Verbraucherzählpfeilsystem*?

Lösung:

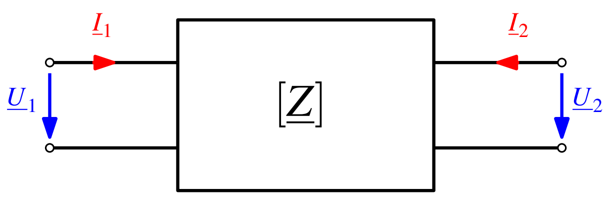
Die Pfeilrichtungen von Strom und Spannung sind entgegengesetzt, die Leistung wird negativ gezählt.

1.5. Quellenteilung (1 Punkt) Erläutern Sie das Verfahren der Quellenteilung am Beispiel der gegebenen Schaltung , indem sie die Spannungsquellen zu nur einer Spannungsquelle U_B zusammenfassen.



1.6. Z-Matrix eines Vierpols (2 Punkte) Geben Sie Elemente der Z-Matrix $\underline{Z}_{m,n}$ eines Vierpols in allgemeiner Form an.

Hinweis: Es gilt $\underline{\mathbf{U}} = \underline{\mathbf{Z}} \cdot \underline{\mathbf{I}}$

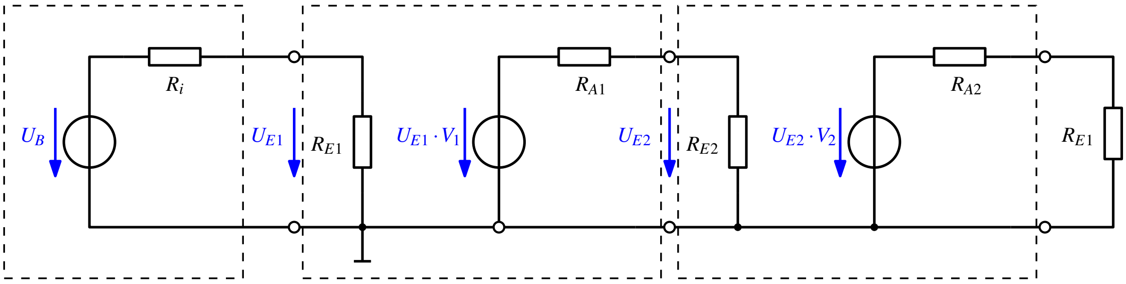


Lösung:

$$\underline{Z}_{1,1} = \left.\frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1}\right|_{\underline{I}_2=0} \qquad \underline{Z}_{1,2} = \left.\frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_2}\right|_{\underline{I}_1=0}$$
$$\underline{Z}_{2,1} = \left.\frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_1}\right|_{\underline{I}_2=0} \qquad \underline{Z}_{2,2} = \left.\frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_2}\right|_{\underline{I}_1=0} \tag{1}$$

1.7. Allgemeine Verstärkerschaltungen (2 Punkte) Fassen Sie die Verstärker 1 und Verstärker 2 zusammen und geben Sie das Ersatzschaltbild an.

Hinweis: Beschriften Sie die Elemente des Ersatzschaltbildes

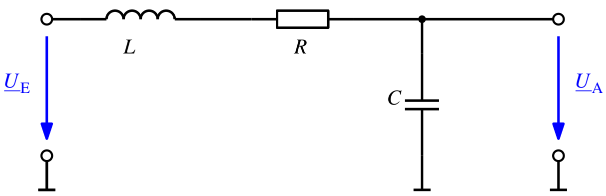


Lösung:

Das ESB ist das eines einzelnen Verstärkers mit den Elementen

- *Eingangswiderstand* R_{E1}
- *Ausgangswiderstand* R_{A2}
- *gesamte Leerlaufspannungsverstärkung* $V_{U,ges} = V_1 \cdot V_2$

1.8. Übertragungsfunktion (2 Punkte) Geben Sie die Übertragungsfunktion der gegebenen RLC-Reihenschaltung in der Normalform für einen Filter 2. Ordnung an.



Lösung:

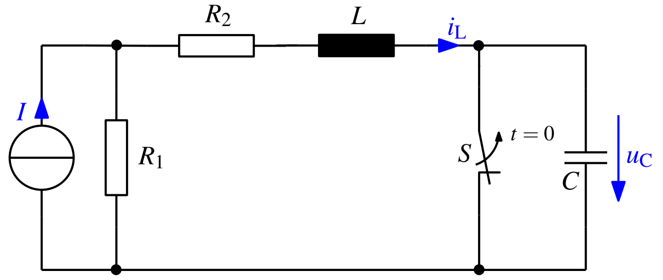
$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{U}_A}{\underline{U}_E} == \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} \cdots = \frac{1}{1 + j\omega RC - \omega^2 LC}$$

1.9. Tiefpassfilter erster Ordnung (1 Punkt) Geben Sie eine schaltungstechnische Realisierung für ein Tiefpassfilter erster Ordnung an.

Lösung:

Es sollte ein RC-TP oder ein RL-TP werden.

2. Aufgabe (15 Punkte): Ausgleichsvorgang 2. Ordnung



$R_1 = 5\Omega$, $R_2 = 10\Omega$, $L = 2\text{mH}$, $C = 100\text{nF}$, $I = 3\text{A}$

Die gezeigte Schaltung befindet sich im eingeschwungenen Zustand. Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird der Schalter S **geöffnet**.

2.1. Randbedingungen (4 Punkte) Geben Sie i_L und u_C für jeweils $t = 0$ und $t \to \infty$ an.

Lösung:

$$\begin{aligned}
i_L(0) &= \frac{R_1}{R_1+R_2}\cdot I = \frac{5}{5+10}\cdot 3A = 1A \\
u_C(0) &= 0V \\
i_L(\to\infty) &= 0A \\
u_C(\to\infty) &= R_1\cdot I = 5\Omega\cdot 3A = 15V
\end{aligned}$$

2.2. Differenzialgleichung der Kondensatorspannung (3 Punkte) Stellen Sie für $t \geq 0$ die Differenzialgleichung für u_C in Normalform auf.

Lösung:

Smart students may convert the current source to voltage source, but the solution here will only show the basic steps directly from the original circuit.

$$\begin{aligned}
i_L &= i_C = C\frac{du_C}{dt} \\
u_L &= L\frac{di_L}{dt} = LC\frac{du_C^2}{dt^2} \\
u_{R_2} &= R_2 i_L \\
u_{R_1} &= u_{R_2} + u_L + u_C
\end{aligned}$$

Calculate...

$$\begin{aligned}
I = \frac{u_{R_1}}{R_1} + i_L \Rightarrow u_{R_1} + R_1 i_L = R_1 I \Rightarrow u_{R_2} + u_L + u_C + R_1 i_L = R_1 I \Rightarrow \\
u_L + (R_1+R_2)i_L + u_C = R_1 I \Rightarrow LC\frac{du_C^2}{dt^2} + (R_1+R_2)C\frac{du_C}{dt} + u_C = R_1 I \Rightarrow \\
\frac{du_C^2}{dt^2} + \frac{R_1+R_2}{L}\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{LC}u_C = \frac{R_1 I}{LC}
\end{aligned}$$

2.3. Dämpfung und Resonanz (2 Punkte) Berechnen Sie den Dämpfungsfaktor δ und die Resonanzfrequenz ω_0.

Lösung:

Definition of $2\delta = \frac{R_1+R_2}{L}$ *and* $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ *gives:*

$$\delta = \frac{R_1+R_2}{2L} = \frac{15\Omega}{2 \cdot 2mH} = 7,5 \cdot 10^3 s^{-1}\,, \tag{2}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} = \sqrt{\frac{1}{2mH \cdot 100nF}} = 7,07 \cdot 10^4 s^{-1}\,. \tag{3}$$

2.4. Lösungsansatz (2 Punkte) Geben Sie die allgemeinen Lösungsansätze für $u_C(t)$ und $i_L(t)$ an.

Lösung:

The particular solution of $u_C(t)$ *is*

$$u_{C\,p}(t) = R_1 I. \tag{4}$$

Since $\delta < \omega_0$*, the general solution of* $u_C(t)$ *is:*

$$u_{C\,h}(t) = e^{-\delta t}\left[K_1\cos(\omega t) + K_2\sin(\omega t)\right]\,, \tag{5}$$

with $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$.

Sum up (4) and (5):

$$u_C(t) = u_{C\,h}(t) + u_{C\,p}(t) = e^{-\delta t}\left[K_1\cos(\omega t) + K_2\sin(\omega t)\right] + R_1 I\,. \tag{6}$$

So

$$\begin{aligned} i_L(t) &= C\frac{du_C}{dt} = C\frac{d}{dt}\left\{e^{-\delta t}\left[K_1\cos(\omega t) + K_2\sin(\omega t)\right] + R_1 I\right\} \\ &= C\frac{de^{-\delta t}}{dt}\cdot\left[K_1\cos(\omega t) + CK_2\sin(\omega t)\right] + e^{-\delta t}\cdot\frac{d}{dt}\left[K_1\cos(\omega t) + K_2\sin(\omega t)\right] \\ &= -C\delta e^{-\delta t}\left[K_1\cos(\omega t) + K_2\sin(\omega t)\right] + Ce^{-\delta t}\left[-K_1\omega\sin(\omega t) + K_2\omega\cos(\omega t)\right] \\ &= -Ce^{-\delta t}\left[(\delta K_1 - \omega K_2)\cos(\omega t) + (\omega K_1 + \delta K_2)\sin(\omega t)\right]\,. \end{aligned} \tag{7}$$

2.5. Lösung (2 Punkte) **Berechnen Sie** mit Hilfe der Randbedingungen die Lösungen für $u_C(t)$ und $i_L(t)$. Geben Sie dabei die Konstanten der Lösung als Zahlenwerte an.

Lösung:

Substitute $t = 0$ *to (6) and (7):*

$$u_C(0) = K_1 + R_1 I i_L(0) = -C(\delta K_1 - \omega K_2)\,. \tag{8}$$

Since

$$u_C(0) = 0\,\mathrm{V} \tag{9}$$

$$i_L(0) = 1\,\mathrm{A}\,, \tag{10}$$

the equations to solve K_1 and K_2 are:

$$K_1 + R_1 I = 0\,\mathrm{V} \tag{11}$$

$$-C(\delta K_1 - \omega K_2) = 1\,\mathrm{A}\,, \tag{12}$$

which can be solved as:

$$K_1 = -R_1 I = -15\,\mathrm{V} \tag{13}$$

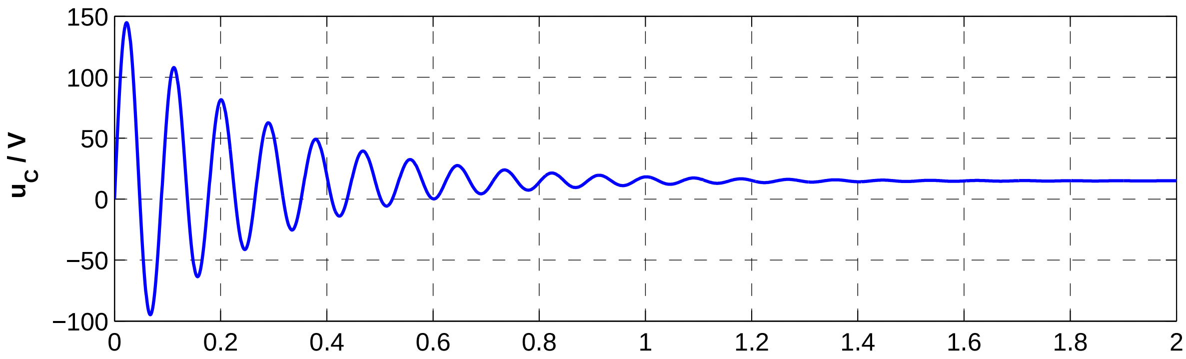
$$K_2 = \frac{1\,\mathrm{A} - \delta R_1 C I}{\omega C} \approx \frac{1\,\mathrm{A}}{\omega C} = 142\,\mathrm{V}\,. \tag{14}$$

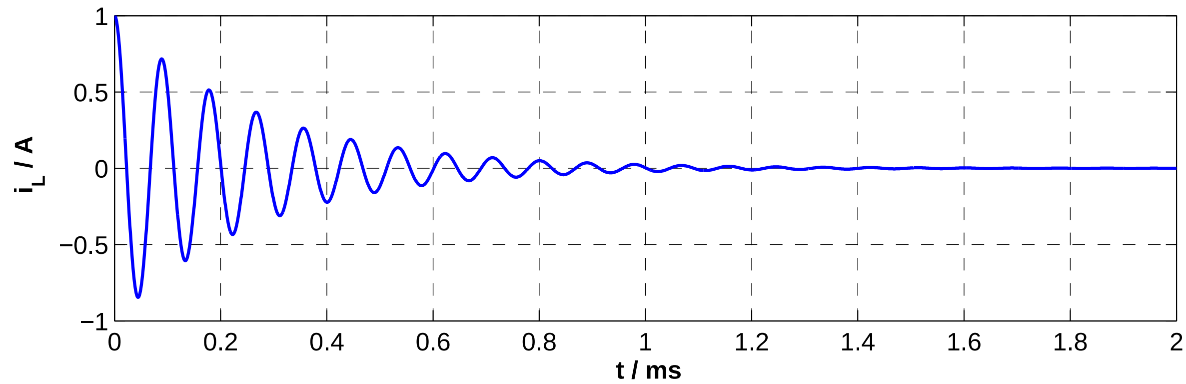
Substitute (13) and (14) back to (6) and (7):

$$u_C(t) = e^{-\delta t}\left[-R_1 I\cos(\omega t) + \frac{1\,\mathrm{A} - \delta R_1 C I}{\omega C}\sin(\omega t)\right] + R_1 I \tag{15}$$

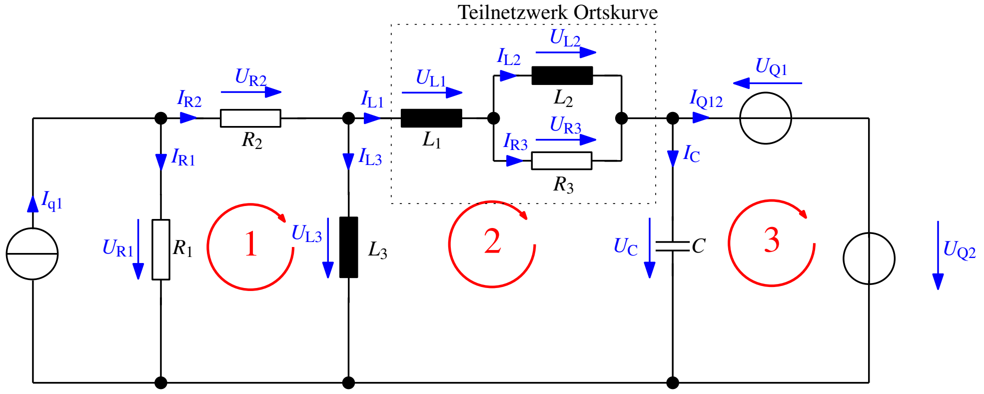
$$i_L = -Ce^{-\delta t}\left[\left(-\delta R_1 I - \omega\frac{1\,\mathrm{A} - \delta R_1 C I}{\omega C}\right)\cos(\omega t) + \left(-\omega R_1 I + \delta\frac{1\,\mathrm{A} - \delta R_1 C I}{\omega C}\right)\sin(\omega t)\right] \tag{16}$$

2.6. Darstellung der Zeitverläufe (2 Punkte) **Skizzieren** Sie die Zeitverläufe für $u_C(t)$ und $i_L(t)$.



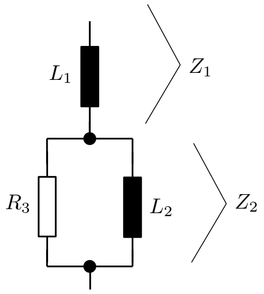


3. Aufgabe (15 Punkte): Ortskurve und Maschenstromverfahren



3.1. Ortskurve (3 Punkte) Skizzieren Sie die Ortskurve der Impedanz $\underline{Z}(\omega)$ für das Teilnetzwerk bestehend aus L_1, L_2 und R_3 (gestrichelter Kasten) im unten stehenden Diagramm. Tragen Sie hierfür die Teilortskurven auf und konstruieren Sie daraus den Gesamtverlauf.

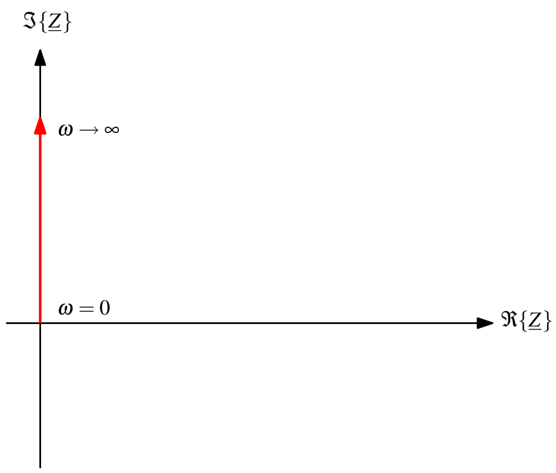
Lösung:



$$Z_1 = j\omega L_1$$

$$\omega = 0 \Rightarrow Z_1 = 0$$

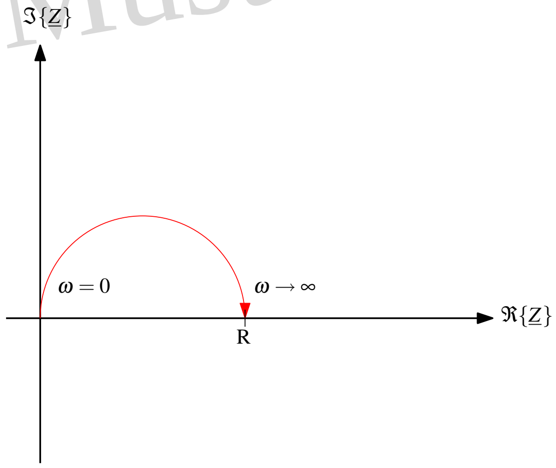
$$\omega \to \infty \Rightarrow Z_1 \to \infty$$



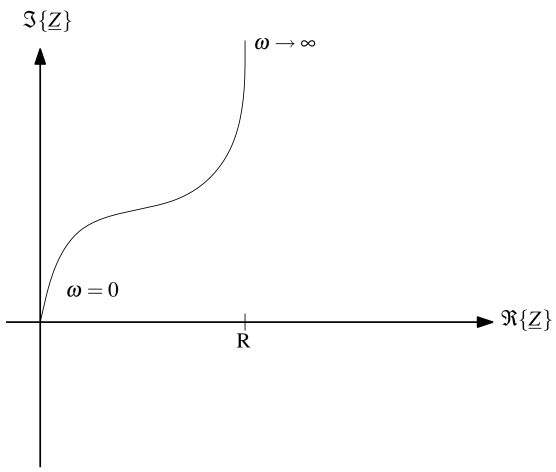
$$Z_2 = R_3 \parallel L_2 = \frac{1}{\frac{1}{R_3} + \frac{1}{L_2}} = \frac{1}{\frac{j\omega L_2 + R_3}{R_3 \cdot j\omega L_2}} = \frac{R_3 \cdot j\omega L_2}{j\omega L_2 + R_3} = \frac{R_3}{1 + \frac{R_3}{j\omega L_2}}$$

$$\omega = 0 \Rightarrow Z_2 = 0$$

$$\omega \to \infty \Rightarrow Z_2 = R_3$$
$$\omega = beliebig \Rightarrow Z = +jX$$

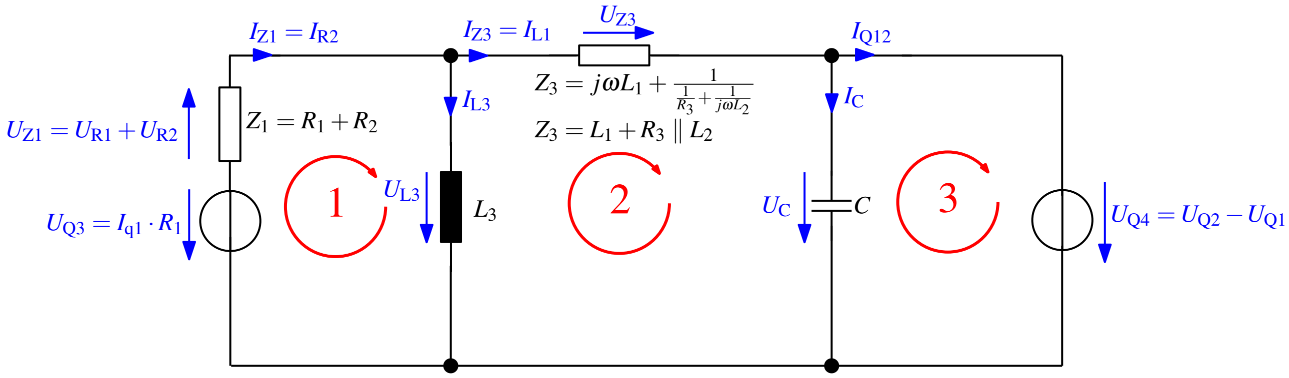


$$Z_{gesamt} = Z_1 + Z_2$$



3.2. Vorbereitung der Schaltung (2 Punkte) Bereiten Sie durch Vereinfachungen die oben gezeigte Schaltung für eine Maschenstromanalyse vor. Verwenden Sie die vorliegende Maschennumerierung.

Lösung:



3.3. Maschengleichungen (3 Punkte) Stellen Sie für die Maschen 1…3 die zugehörigen Maschengleichungen auf. Sortieren Sie diese so um, dass sich daraus die Elemente der Impedanzmatrix direkt ablesen lassen.

Lösung:

$$Z_1 \cdot I_{M1} + Z_{L3}(I_{M1} - I_{M2}) = U_{Q3}$$
$$\Rightarrow I_{M1} \cdot (Z_1 + Z_{L3}) + I_{M2} \cdot (-Z_{L3}) = U_{Q3}$$

mit $Z_1 = R_1 + R_2, Z_{L3} = j\omega L_3$ *und* $U_{Q3} = I_{q1} \cdot R_1$

$$Z_{L3}(I_{M2} - I_{M1}) + Z_3 \cdot I_{M2} + Z_C \cdot (I_{M2} - I_{M3}) = 0$$
$$\Rightarrow I_{M1} \cdot (-Z_{L3}) + I_{M2}(Z_{L3} + Z_3 + Z_C) + I_{M3} \cdot (-Z_C) = 0$$

mit $Z_3 = j\omega L_1 + \frac{1}{\frac{1}{R_3} + \frac{1}{j\omega L_2}}$ *und* $Z_C = \frac{1}{j\omega C}$

$$Z_C(I_{M3} - I_{M2}) = U_{Q4}$$
$$\Rightarrow I_{M1} \cdot 0 + I_{M2} \cdot (-Z_C) + I_{M3} \cdot Z_C = -U_{Q4}$$

mit $U_{Q4} = U_{Q2} - U_{Q1}$

3.4. Impedanzmatrix (2 Punkte) Erstellen Sie aus den Maschengleichungen in Aufgabe 3.3 die Impedanzmatrix $\underline{\mathbf{Z}}$ des Netzwerkes.

Lösung:

$$\begin{pmatrix} (Z_1 + Z_{L3}) & -Z_{L3} & 0 \\ -Z_{L3} & (Z_{L3} + Z_3 + Z_C) & -Z_C \\ 0 & -Z_C & Z_C \end{pmatrix}$$

3.5. Quellenvektor (1 Punkt) Erstellen Sie aus den Maschengleichungen in Aufgabe 3.3 den Quellenvektor $\underline{\mathbf{U}}_q$ des Netzwerkes.

Lösung:

$$\begin{pmatrix} U_{Q3} \\ 0 \\ -U_{Q4} \end{pmatrix}$$

mit $U_{Q3} = I_{q1} \cdot R_1$ *und* $U_{Q4} = U_{Q2} - U_{Q1}$

3.6. Inzidenzmatrix (4 Punkte) Stellen Sie die Beziehung der echten Ströme des Ausgangsnetzwerks zu den virtuellen Maschenströmen formelmäßig her. Stellen Sie daraus die Inzidenzmatrix $\underline{\mathbf{A}}$ sowie den dazu gehörigen Vektor der Einzelströme des Ausgangsnetzwerks $\underline{\mathbf{I}}$ auf und geben Sie die Berechnungsformel für den Strom $\underline{I}_{R1}$ an.

Lösung:

Einzelströme für die Inzidenzmatrix:

$I_{R1} =$ *muss separat berechnet werden*
$I_{R2} = I_{M1}$
$I_{L1} = I_{M2}$

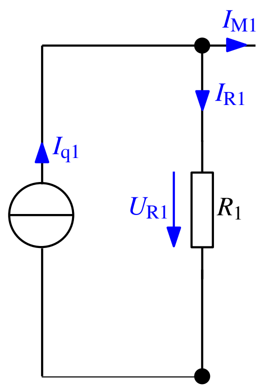
$I_{L3} = I_{M1} - I_{M2}$
$I_C = I_{M2} - I_{M3}$
$I_{Q12} = I_{M3}$

Vektor der Einzelströme :

$$\underline{\mathbf{I}} = \begin{pmatrix} I_{R2} \\ I_{L1} \\ I_{L3} \\ I_C \\ I_{Q12} \end{pmatrix}$$

Inzidenzmatrix:

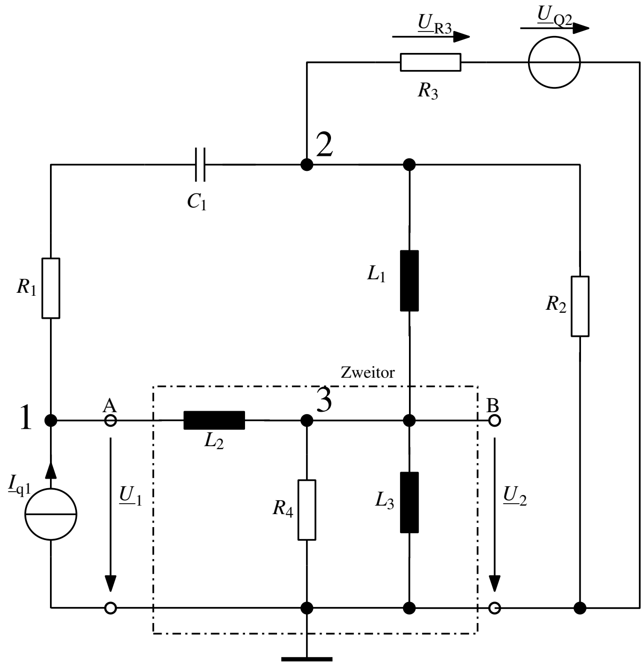
$$\underline{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{17}$$



Der Strom I_{R1}:

$$I_{q1} - I_{M2} = I_{R1}$$

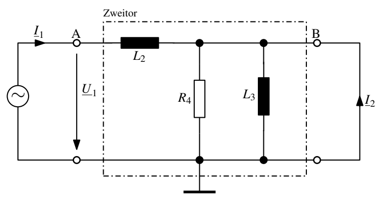
4. Aufgabe (15 Punkte): Knotenpotentialverfahren mit Zweitor



4.1. Reihen-Parallelmatrix $\underline{\mathbf{H}}$ (5 Punkte) Berechnen Sie für das Zweitor zwischen den Punkten **A** und **B** bestehend aus L_2, L_3 und R_4 (gestrichelter Kasten) die Elemente der Reihen-Parallelmatrix $\underline{\mathbf{H}}$. $\underline{U}_1$ sei dabei die Eingangs- und $\underline{U}_2$ die Ausgangsspannung.

Lösung:

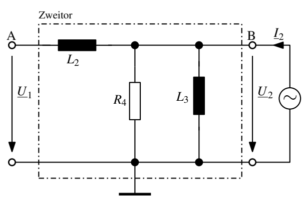
KS am Ausgang:



$$\underline{H}_{11} = \left.\frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1}\right|_{\underline{U}_2=0} = j\omega L_2 \qquad (18)$$

$$\underline{H}_{21} = \left.\frac{\underline{I}_2}{\underline{I}_1}\right|_{\underline{U}_2=0} \quad mit \quad \underline{I}_2 = -\underline{I}_1 \Rightarrow \underline{H}_{21} = -1 \qquad (19)$$

LL am Eingang:



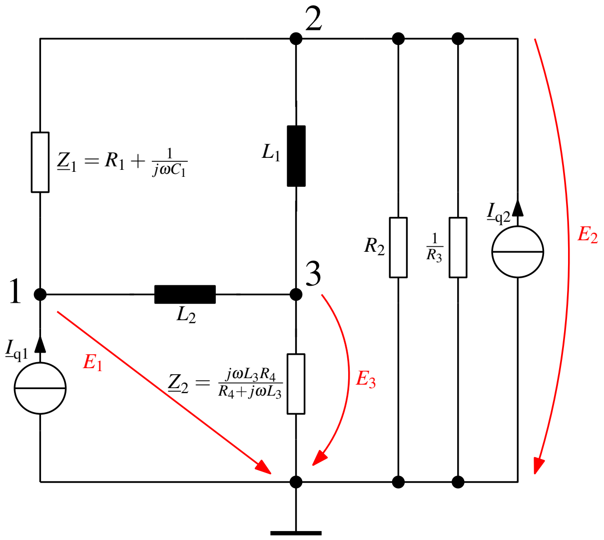
$$\underline{H}_{12} = \left.\frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2}\right|_{\underline{I}_1=0} \quad mit \quad \underline{U}_1 = \underline{U}_2 \Rightarrow \underline{H}_{12} = 1 \tag{20}$$

$$\underline{H}_{22} = \left.\frac{\underline{I}_2}{\underline{U}_2}\right|_{\underline{I}_1=0} = \frac{1}{R_4} + \frac{1}{j\omega L_3} \tag{21}$$

$$\Rightarrow \underline{\mathbf{H}} = \begin{pmatrix} j\omega L_2 & 1 \\ -1 & \frac{1}{R_4} + \frac{1}{j\omega L_3} \end{pmatrix} \tag{22}$$

4.2. Vorbereitung der Schaltung (2 Punkte) Bereiten Sie durch Vereinfachungen die oben gezeigte Schaltung für eine Knotenpotentialanalyse vor. Beachten Sie dabei die Quellen und nummerieren Sie die Knoten. Zeichnen Sie anschließend die Knotenpotenzialpfeile ein.

Lösung:



4.3. Knotengleichungen (3 Punkte) Stellen Sie für die Knoten 1...3 die zugehörigen Knotengleichungen auf. Sortieren Sie diese so um, dass sich daraus die Elemente der Admittanzmatrix direkt ablesen lassen.

Lösung:

Knoten 1:

$$\frac{1}{\underline{Z}_1}\cdot(\underline{E}_1-\underline{E}_2)+\frac{1}{j\omega L_2}(\underline{E}_1-\underline{E}_3)=\underline{I}_1$$

$$\underline{E}_1\cdot\left(\frac{1}{\underline{Z}_1}+\frac{1}{j\omega L_2}\right)+\underline{E}_2\cdot\left(-\frac{1}{\underline{Z}_1}\right)+\underline{E}_3\cdot\left(-\frac{1}{j\omega L_2}\right)=\underline{I}_1$$

Knoten 2:

$$\frac{1}{\underline{Z}_1}\cdot(\underline{E}_2-\underline{E}_1)+\frac{1}{j\omega L_1}\cdot(\underline{E}_2-\underline{E}_3)+\left(\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right)\cdot\underline{E}_2=\underline{I}_2$$

$$\underline{E}_1\cdot\left(-\frac{1}{\underline{Z}_1}\right)+\underline{E}_2\cdot\left(\frac{1}{\underline{Z}_1}+\frac{1}{j\omega L_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right)+\underline{E}_3\cdot\left(-\frac{1}{j\omega L_1}\right)=\underline{I}_2$$

Knoten 3:

$$\frac{1}{\underline{Z}_2}\cdot\underline{E}_3+\frac{1}{j\omega L_2}\cdot(\underline{E}_3-\underline{E}_1)+\frac{1}{j\omega L_1}\cdot(\underline{E}_3-\underline{E}_2)=0$$

$$\underline{E}_1\cdot\left(-\frac{1}{j\omega L_2}\right)+\underline{E}_2\cdot\left(-\frac{1}{j\omega L_1}\right)+\underline{E}_3\cdot\left(\frac{1}{\underline{Z}_2}+\frac{1}{j\omega L_2}+\frac{1}{j\omega L_1}\right)=0$$

4.4. Admittanzmatrix (2 Punkte) Erstellen Sie aus den Knotengleichungen in Aufgabe 4.3 die Admittanzmatrix $\underline{\mathbf{Y}}$ des Netzwerkes.

Lösung:

$$\underline{Y} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{j\omega L_2} & -\frac{1}{\underline{Z}_1} & -\frac{1}{j\omega L_2} \\ -\frac{1}{\underline{Z}_1} & \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{j\omega L_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} & -\frac{1}{j\omega L_1} \\ -\frac{1}{j\omega L_2} & -\frac{1}{j\omega L_1} & \frac{1}{\underline{Z}_2} + \frac{1}{j\omega L_1} + \frac{1}{j\omega L_2} \end{pmatrix}$$

mit $\underline{Z}_1 = \underline{R}_1 + \frac{1}{j\omega C_1}$

$$\underline{Z}_2 = \frac{j\omega L_3 R_4}{R_4 + j\omega L_3}$$

4.5. Quellenvektor (1 Punkt) Erstellen Sie aus den Knotengleichungen in Aufgabe 4.3 den Quellenvektor $\underline{\mathbf{I}}_q$ des Netzwerkes.

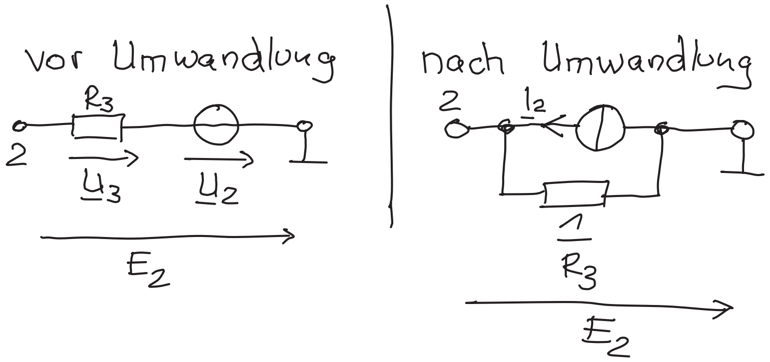
Lösung:

$$\underline{I}_q = \begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \\ \emptyset \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_2}{R_3}$$

4.6. Einzelspannung (2 Punkte) Berechnen Sie die Formel für die Spannung $\underline{U}_{R3}$.

Lösung:

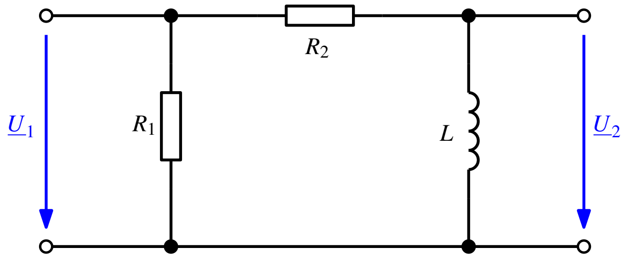
$\underline{U}_3$:



$$\Rightarrow \quad E_2 = \underline{U}_3 + \underline{U}_2 \quad \Rightarrow \quad \underline{U}_3 = E_2 - \underline{U}_2$$

5. Aufgabe (15 Punkte): Frequenzverhalten von Vierpolen

Gegeben ist die Schaltung eines Zweitores mit $R_1 = R_2 = 1\mathrm{k}\Omega$ und $L = 100\mathrm{mH}$.



5.1. Übertragungsfunktion (2 Punkte) Bestimmen Sie die komplexe Übertragungsfunktion $\underline{V}$ des Zweitores in Normalform (= Produkt von Teilfunktionen).

Hinweis: Überlegen Sie, welche Elemente des Netzwerkes wirklich für die Übertragungsfunktion **relevant** sind!

Lösung:

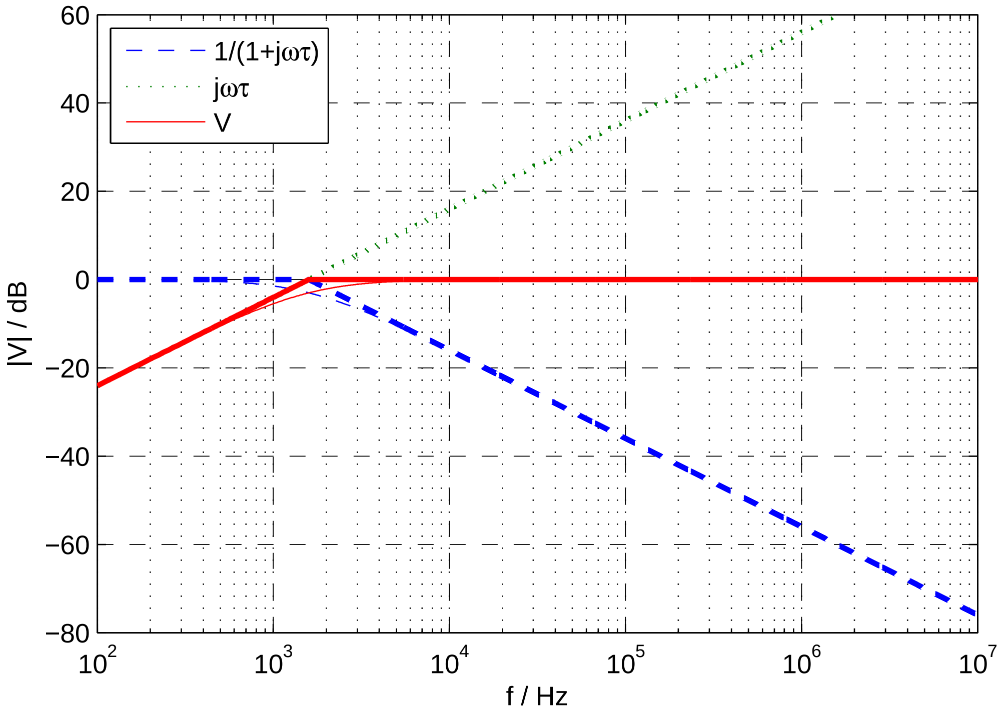
$$\underline{V}(j\omega) = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{j\omega L}{R_2 + j\omega L} = \frac{j\omega \frac{L}{R_2}}{1 + j\omega \frac{L}{R_2}} = \frac{j\omega\tau}{1 + j\omega\tau} \; mit \; \tau = \frac{L}{R_2}$$

5.2. Zeitkonstanten und Grenzfrequenz (2 Punkte) Berechnen Sie die Zeitkonstante τ und die Grenzfrequenz f_{Grenz} der in Aufgabe 5.1 berechneten komplexen Übertragungsfunktion $\underline{V}$.

Lösung:

$$\tau = \frac{L}{R_2} = \frac{100mH}{1k\Omega} = 10^{-4}s$$
$$f_{Grenz} = \frac{1}{\tau \cdot 2\pi} = 1{,}59kHz$$

5.3. Betragsfrequenzgang (3 Punkte) Stellen Sie den Betragsfrequenzgang $|\underline{V}|_{\mathrm{dB}}(j\omega)$ der in Aufgabe 5.1 berechneten komplexen Übertragungsfunktion $\underline{V}$ im unten stehenden Diagramm dar. Machen Sie dabei den Verlauf der Teilfunktionen und die Gesamtfunktion kenntlich.



5.4. Frequenzverhalten (1 Punkt) Mit welchem Verhalten lässt sich der Betragsfrequenzgang aus Aufgabe 5.3 beschreiben?

☐ Tiefpass	☐ Alpenpass
☐ Hochpass	☐ Rückpass
☐ Doppelpass	☐ Allpass
☐ Bandpass	☐ Reisepass

Lösung:

Hochpass

5.5. Verstärkung (2 Punkte) Berechnen Sie die komplexe Verstärkung $\underline{V}$ nach Betrag und Phase und den Betrag dieser Verstärkung $|\underline{V}|_{\mathrm{dB}}$ in dB bei der Frequenz $f = 100\mathrm{Hz}$.

Lösung:

$$\omega(100Hz) = 2\pi \cdot 100Hz = 628{,}3s^{-1}$$

$$\textit{aus Aufgabe davor} \rightarrow \tau = 10^{-4}s$$

$$\underline{V}(100Hz) = \frac{j \cdot 0{,}063}{1 + j \cdot 0{,}063} = \frac{0{,}063\angle 90^\circ}{1\angle 3{,}6^\circ} = 0{,}063\angle 86{,}4^\circ$$

$$|\underline{V}(100Hz)|_{\mathrm{dB}} = 20 \cdot \lg(0{,}063) = -24dB$$

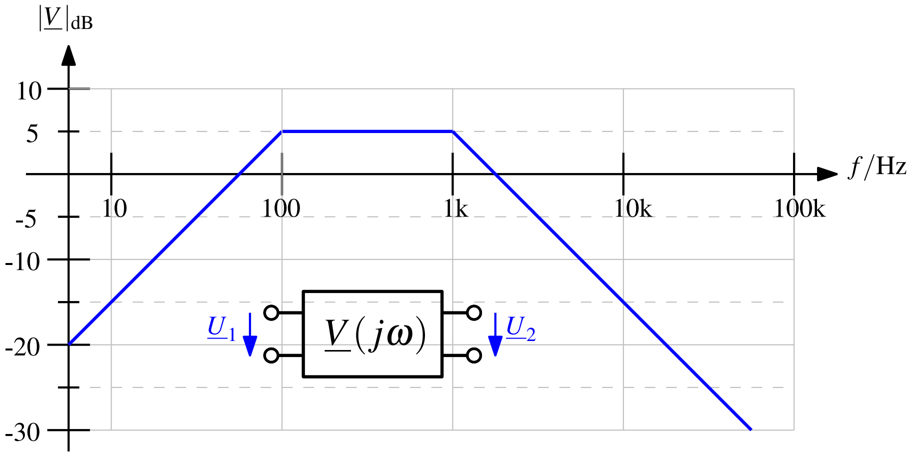
5.6. Kompensation (2 Punkte) Hinter das Netzwerk wird ein Kompensationsnetzwerk geschaltet. Welche Übertragungsfunktion $\underline{V}_{comp}(j\omega)$ muss das nachgeschaltete Netzwerk haben, damit sich für das gesamte System ein konstanter Amplituden- oder Betragsfreqeunzgang von 0dB über den gesamten Frequenzbereich ergibt?

Wie groß muss die Zeitkonstante τ_{comp} dieses Kompensationsnetzwerkes ein?

Lösung:

$$\underline{V}(j\omega)\cdot\underline{V}_{comp}(j\omega) \equiv 1 = 0dB$$
$$\Rightarrow \underline{V}_{comp} = \frac{1+j\omega\tau_{comp}}{j\omega\tau_{comp}}$$
$$\tau_{comp} = \tau = 10^{-4}s$$

5.7. Ausgangsspannung (3 Punkte) Gegeben ist folgender Betragsfrequenzgang.



Gegeben sind die Amplituden des Eingangssignales $\underline{U}_1$ für drei verschiedene Frequenzen. Füllen Sie die Tabelle mit den Werten für die Amplituden des Ausgangssignales $\underline{U}_2$ aus.

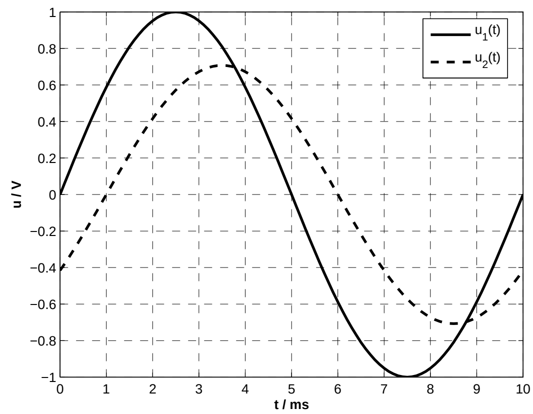
f_1	$\hat{U}_1$ /V	$\lvert\underline{V}\rvert$	$\hat{U}_2$/V
10Hz	10	$-15\text{dB} \rightarrow 0,178$	$10\text{V}\cdot 0,178 = 1,78\text{V}$
500Hz	10	$5\text{dB} \rightarrow 1,78$	$10\text{V}\cdot 1,78 = 17,8\text{V}$
10kHz	1	$-15\text{dB} \rightarrow 0,178$	$1\text{V}\cdot 0,178 = 0,178\text{V}$

$$\lvert\underline{V}\rvert = 10^{\lvert\underline{V}\rvert_{\text{dB}}/20}$$

6. Aufgabe (15 Punkte): Fragen zum Praktikum

Beantworten Sie die folgenden Fragen.

6.1. Phasenwinkel (1 Punkt)

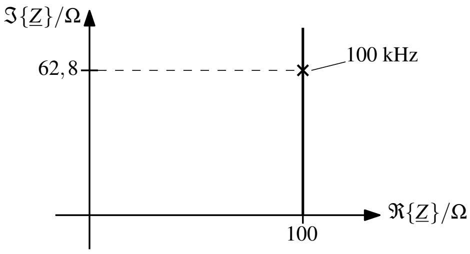


Bestimmen Sie aus den obigen Zeitverläufen den Phasenwinkel φ_2 von $\underline{U}_2$ bezogen auf $\underline{U}_1$.

Lösung:

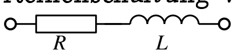
$\underline{U}_2$ *eilt* $\underline{U}_1$ *um 1ms nach oder* $\Delta t = -1ms$. $\varphi = \Delta t \cdot \frac{360°}{T} = -1ms \cdot \frac{360°}{10ms} = -36°$

6.2. Ortskurve (3 Punkte) Im Labor wird die unten stehende Ortskurve für die Impedanz $\underline{Z}(f)$ gemessen. Um welche Schaltung handelt es sich? Bestimmen Sie die Bauteilwerte!



Lösung:

Reihenschaltung von R und L:



$\underline{Z} = 100\Omega + j\ 62,8\Omega$
$\rightarrow \Re\{\underline{Z}\} = R = 100\Omega$
$\rightarrow \Im\{\underline{Z}\} = j\omega L = 62,8\Omega \rightarrow L = \frac{62,8\Omega}{2\pi \cdot 100\ kHz} \approx 100\mu H$

6.3. Resonanz (2 Punkte)

(a) Wie äußert sich die Resonanzfrequenz f_0 eines RLC-Reihenschwingkreises?

Lösung:

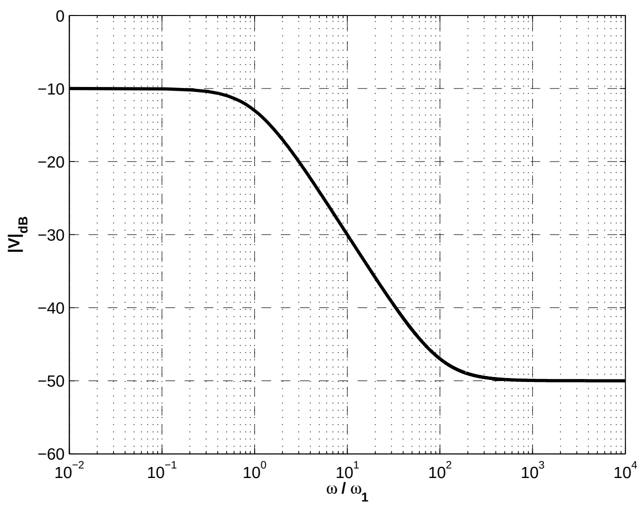
Bei konstant anliegender Wechselspannung ist der Strom maximal oder der resultierende Widerstand der Schaltung minimal.

(b) Geben Sie die Formel für die Resonanzfrequenz an.

Lösung:

In der Schwingungs-DGL (2. Ordnung) wird ω_0 *im Term* ω_0^2 *als Resonanzfrequenz definiert. Bei einer RLC-Reihenschaltung ergibt sich bekanntermaßen* $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$. *Also ist* $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

6.4. Betragsfrequenzgang (4 Punkte)



Sie messen den oben stehenden Betragsfrequenzgang. Stellen Sie diesen durch eine Übertragungsfunktion in Normalform dar.

Lösung:

$\underline{V} = K \cdot \frac{1}{1+j\omega\tau_1} \cdot (1 + j\omega\tau_2)$

Geben Sie die Kenngrößen der Übertragungsfunktion an.

Lösung:

$K = -10dB = 0,32$
$\tau_1 = \frac{1}{\omega_1}$
$\tau_2 = \frac{1}{\omega_2} = \frac{1}{100\cdot\omega_1}$

6.5. Zweitorparameter (2 Punkte) Wie messen Sie den Parameter $\underline{Y}_{11}$? Geben Sie die Definitionsgleichung an und beschreiben Sie in Stichpunkten den Vorgang der Messung.

Lösung:

- *Kurzschlusseingangsadmittanz:* $\underline{Y}_{11} = \frac{\underline{I}_1}{\underline{U}_1}\Big|_{\underline{U}_2=0}$
- *KS am Ausgang*
- *(Wechsel-)Spannungsquelle mit bestimmeter Frequenz über Messwiderstand (Shunt)* R_{Mess} *am Eingang anschließen.*

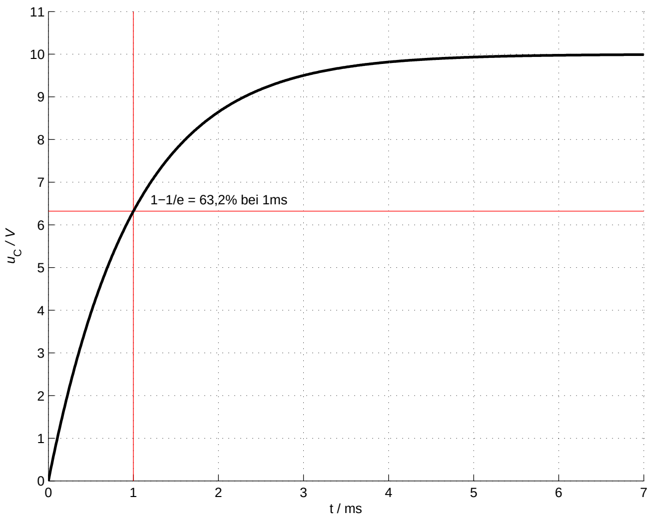
- *$\underline{U}_1$ nach Betrag (Amplitude geht auch!) und Phase messen.*
- *$\underline{I}_1$ nach Betrag (Amplitude geht auch!) und Phase durch Spannungsabfall über R_{Mess} messen.*
- *Rechnen!*

6.6. Strommessung (2 Punkte) Wie messen Sie im allgemeinen einen zeitlichen Stromverlauf mit dem Oszilloskop?

Lösung:

- *Spannungsabfall $u(t)$ über einem Messwiderstand (Shunt) R_{Mess} hat die selbe Phasenlage wie der hindurchfließende Strom. φ ist direkt ablesbar!*
- *Momentanwert des Stromes $i(t)$ wird mit $i(t) = \frac{u(t)}{R_{Mess}}$ errechnet.*

6.7. RC-Ausgleichsvorgang (1 Punkt) Gegeben ist folgender Zeitverlauf der Aufladung eines Kondensators über einen Widerstand. Bestimmen Sie die Zeitkonstante τ dieses Ausgleichsvorganges!



Lösung:

Die Zeitkonstante ist bei einer Aufladung bei $1 - \frac{1}{e^1} = 63{,}2\%$ des Endwertes $10V$. Als Ergebnis ist alles um $\tau = 1ms$ innerhalb der Ablesegenauigkeit zulässig!