Mittwoch, 24. Februar 2021 13:39

Probeklausur Energiemethoden 24.02.2021

Probeklausur

Univ.-Prof. Dr. rer. nat. Wolfgang H. Müller
Technische Universität Berlin
Fakultät V – Institut für Mechanik
Fachgebiet für Kontinuumsmechanik und Materialtheorie
Sekretariat MS 2, Einsteinufer 5, 10587 Berlin

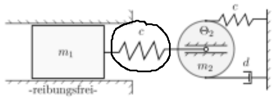
Technische Universität Berlin LKM

Probeklausur – Energiemethoden der Mechanik WS 2020/21

Kurzfragenteil

1. Wieviele generalisierte Koordinaten werden benötigt, um das skizzierte Scheibensystem zu beschreiben? **(1 Punkt)**

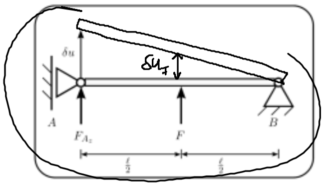
$f = 3$



2 Körper : $k = 2$ (Anzahl der Körper)
3 Zwangsbedingungen : $r = 3$
$f = 3k - r = 6 - 3 = \underline{3}$

2. Ein starrer Balken wird durch zwei Festlager statisch gelagert und wie dargestellt durch eine Verminderung der Lagerwertigkeit im Punkt A beweglich gemacht.
   a) Zeichnen Sie den nach dem Prinzip der virtuellen Verrückungen verschobenen Balken in die Skizze ein. **(1 Punkt)**
   b) Geben Sie die virtuelle Arbeit δA in Abhängigkeit der gegebenen Größen und der Kraft F_{A_z} an. **(1 Punkt)**

Geg.: F, ℓ, δu.



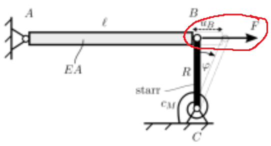
$0 = \delta A = F_{Az}\delta u + \frac{1}{2} F \delta u$

$$\delta A = F_{Az}\,\delta u + F \cdot \delta u_F = F_{Az}\,\delta u + \frac{1}{2} F \delta u$$

$$\frac{\delta u_F}{\ell/2} = \frac{\delta u}{\ell} \qquad \delta u_F = \frac{\delta u}{2}$$

3. Das dargestellte System besteht aus einem Dehnstab der Länge ℓ, einem starren Hebel der Länge R und einer Drehfeder mit der Federkonstanten c_M.
   a) Geben Sie die komplementäre Formänderungsenergie des Systems W^* an. **(1 Punkt)**
   b) Bestimmen Sie die Verschiebung u_B des Punktes B für den Fall kleiner Auslenkungen mithilfe eines Satzes von Castigliano. **(1 Punkt)**

Geg.: EA, F, c_M, ℓ, R.

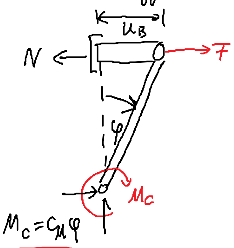


$$W^*_{Balken} = \frac{1}{2EA}\int N^2\,dx + \cancel{\frac{\alpha}{2GA}\int Q^2\,dx} + \frac{1}{2EI_{yy}}\int \cancel{M_y^2}\,dx + \frac{1}{2GI_p}\int \cancel{M_T^2}\,dx$$

0, schubstarr

0

0



$$W^* = W^*_{Balken} + \frac{1}{2c_M} M_C^2$$

$$\Sigma M^{(C)} = -M_C - FR + NR$$

$$N = F - \frac{M_C}{R}, \quad \varphi = \frac{u_B}{R}, \quad M_C = c_M \varphi$$

$$N = F - \frac{c_M u_B}{R^2}$$

$$\boxed{W^* = \frac{1}{2EA}\left(F - \frac{c_M u_B}{R^2}\right)^2 \ell + \frac{1}{2} c_M \frac{u_B^2}{R^2}}$$

$$u_B = \frac{\partial W^*}{\partial F} = \frac{1}{EA}\left(F - \frac{c_M u_B}{R^2}\right)\ell$$

$$\Leftrightarrow \quad u_B + \frac{c_M \ell}{EAR^2} u_B = \frac{F\ell}{EA} \Rightarrow \boxed{u_B = \frac{F\ell}{EA + \frac{c_M \ell}{R^2}}}$$

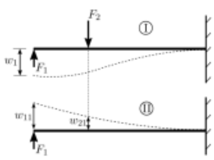
4. Geben Sie die Maßeinheiten der folgenden Größen ausschließlich in den Einheiten: 1, N, kg, m, s und K an. **(1 Punkt)**

Größe	Symbol	Einheit
Formänderungsenergiedichte	w	N/m^2
Dehnsteifigkeit	EA	$\frac{N}{m^2}\,m^2 = N$

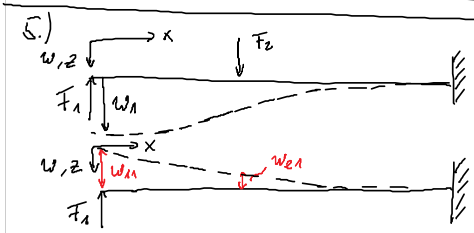
Univ.-Prof. Dr. rer. nat. Wolfgang H. Müller
Technische Universität Berlin
Fakultät V – Institut für Mechanik
Fachgebiet für Kontinuumsmechanik und Materialtheorie
Sekretariat MS 2, Einsteinufer 5, 10587 Berlin
Technische Universität Berlin LKM

5. Der dargestellte fest eingespannte Balken wird mit den Kräften F_1 und F_2 belastet, wobei die Durchbiegung w_1 gesucht ist (Fall I). Bekannt sind die Durchbiegungen w_{11} und w_{21} an den betreffenden Stellen für den Fall, dass lediglich die Kraft F_1 wirkt (Fall II).
Geben Sie die Durchbiegung w_1 in den gegebenen Größen an. Nutzen Sie die Beziehungen $\alpha^{kl} = \frac{f^k}{K^l}$ und das Reziprozitätstheorem nach Maxwell und Betti. **(1 Punkt)**

Geg.: F_1, F_2, w_{11}, w_{21}.



5.)



(gesucht w_1)

$$w_1 = \alpha^{11} F_1 + \alpha^{12} F_2$$

$$\alpha^{11} = \frac{w_{11}}{F_1}, \quad \alpha^{12} = \alpha^{21} = -\frac{w_{21}}{F_1}$$

$$w_1 = \frac{w_{11}}{F_1} F_1 + \left(-\frac{w_{21}}{F_1}\right) F_2 = w_{11} - \frac{F_2}{F_1} w_{21}$$

6. Identifizieren Sie in der unten angegebenen Gleichung die folgenden vier Ausdrücke. Tragen Sie das zugehörige Symbol jeweils in das entsprechende Kästchen ein. **(1 Punkt)**

δB: virtuelle Beschleunigungsarbeit
δA_f: virtuelle Arbeit der Volumenkräfte
δA_T: virtuelle Arbeit der Oberflächenkräfte
δW_S: virtuelle Formänderungsenergie

$$\underbrace{\int_V \sigma_{ji} \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j}\,\mathrm{d}V}_{\boxed{\delta W_S}} = \underbrace{\oint_{\partial V} t_i \delta u_i\,\mathrm{d}A}_{\boxed{\delta A_T}} + \underbrace{\int_V f_i \delta u_i \rho\,\mathrm{d}V}_{\boxed{\delta A_f}} - \underbrace{\int_V \ddot{u}_i \delta u_i \rho\,\mathrm{d}V}_{\boxed{\delta B}}$$

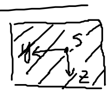
7. Gesucht wird eine Differentialgleichung für die Biegelinie $w(x)$ eines Balkens der Länge ℓ mit konstantem Querschnitt mithilfe der Variationsrechnung.
Leiten Sie ausgehend von der folgenden Gleichung einen Ausdruck für den Momentenverlauf $M(x)$ her. **(1 Punkt)**

$$\delta \int_V \frac{1}{6} G z^2 (w'')^2\,\mathrm{d}V = \int_0^\ell M(x) \delta w''(x)\,\mathrm{d}x$$

Geg.: $G = \text{const.}$, $I_{yy} = \int z^2\,\mathrm{d}A$

7.)

$$\delta \int_V \frac{1}{6} G z^2 (w''(x))^2\,dV = \int_0^\ell M(x)\,\delta w''(x)\,dx$$



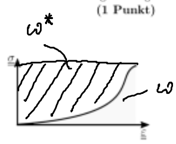
$$\int_V \frac{1}{6} G z^2\, 2 w''(x)\,\delta w''(x)\,dV = \frac{1}{3} G \int_0^\ell \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2\, w''(x)\,\delta w''(x)\,dz\,dy\,dx$$

$$= \frac{1}{3} G \underbrace{\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2\,dz\,dy}_{\int z^2 dA = I_{yy}} \int_0^\ell w''(x)\,\delta w''(x)\,dx = \frac{1}{3} G I_{yy} \int_0^\ell w''(x)\,\delta w''(x)\,dx$$

$$= \int_0^\ell M(x)\,\delta w''(x)\,dx$$

8. Kreuzen Sie die für die komplementäre Formänderungsenergiedichte w^* im allgemeinsten Fall richtige Aussage an. **(1 Punkt)**

- [ ] $w^* = \int_{\tilde{\varepsilon}_{ij}=0}^{\tilde{\varepsilon}_{ij}=\varepsilon_{ij}} \sigma_{ij}(\tilde{\underline{\varepsilon}})\,\mathrm{d}\tilde{\varepsilon}_{ij}$ ← w
- [x] $w^* = \int_{\tilde{\sigma}_{ij}=0}^{\tilde{\sigma}_{ij}=\sigma_{ij}} \varepsilon_{ij}(\tilde{\underline{\sigma}})\,\mathrm{d}\tilde{\sigma}_{ij}$
- [ ] $w^* = w$

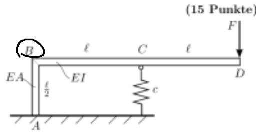


Univ.-Prof. Dr. rer. nat. Wolfgang H. Müller
Technische Universität Berlin
Fakultät V – Institut für Mechanik
Fachgebiet für Kontinuumsmechanik und Materialtheorie
Sekretariat MS 2, Einsteinufer 5, 10587 Berlin

Rechenteil

1 Satz von Castigliano (15 Punkte)

Der dargestellte schubstarre EULER-BERNOULLI Balken der Biegesteifigkeit EI und Dehnsteifigkeit EA ist im Punkt A fest eingespannt. Es wird durch die Kraft F belastet und im Punkt C durch eine Feder zusätzlich abgestützt.



a) Berechnen Sie die Formänderungsenergie des Systems W^* in Abhängigkeit der Federkraft F_C.

b) Wende Sie einen der Sätze von CASTIGLIANO an und berechnen Sie die Verschiebung u_C des Punktes C in Abhängigkeit von den gegebenen Größen.

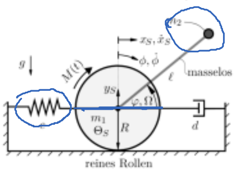
c) Berechnen Sie mithilfe eines der Sätze von CASTIGLIANO den Verdrehwinkel φ_B an der Stelle B.

Hinweis: Für diesen Aufgabenteil können die Kraft F_C und die Verschiebung u_C als gegeben angenommen werden

Geg.: F, c, ℓ, EI, EA.

2 Lagrange-Gleichungen 2. Art (14 Punkte)

Eine auf dem Untergrund rollende Walze der Masse m_1 und dem Radius R ist im Schwerpunkt mit einer Feder und einem Dämpfer gekoppelt. Sie wird durch das Moment $M(t)$ angetrieben. Die zusätzlich über eine masselose starre Verbindung der Länge ℓ angebrachte Punktmasse mit der Masse m_2 wird mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $\Omega = \dot{\varphi} = \text{const.}$ bewegt.



a) Bestimmen Sie die Anzahl der Freiheitsgrade f des Systems mit der Formel $f = p - k$. Geben Sie alle kinematischen Beziehungen an.

b) Bestimmen Sie die Orts- und Geschwindigkeitsvektoren beider Massen und stellen Sie die LAGRANGE-Funktion L des Systems in den generalisierten Koordinaten auf.

c) Stellen Sie die Summe der nicht-konservativen Kräfte und Momente Q_i^* in den generalisierten Koordinaten auf.

d) Bestimme die Bewegungsdifferentialgleichung des Systems mithilfe der LAGRANGE-Gleichungen 2. Art.

Geg.: m_1, m_2, Θ_S, R, ℓ, c, d, g, Ω, $M(t)$.

$$\underbrace{-\frac{b}{2} \quad -\frac{h}{2}}_{\int z^2 \, dA = I_{yy}} \qquad = \int_0^\ell M(x)\, \delta w''(x)\, dx$$

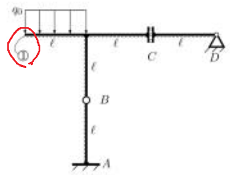
$$\Rightarrow \; 0 = \int_0^\ell \left(\frac{1}{3} G I_{yy}\, w''(x) - M(x)\right) \delta w''(x)\, dx \Rightarrow \frac{1}{3} G I_{yy}\, w''(x) = M(x)$$

Univ.-Prof. Dr. rer. nat. Wolfgang H. Müller
Technische Universität Berlin
Fakultät V – Institut für Mechanik
Fachgebiet für Kontinuumsmechanik und Materialtheorie
Sekretariat MS 2, Einsteinufer 5, 10587 Berlin

Technische Universität Berlin LKM

3 Prinzip der virtuellen Kräfte (11 Punkte)

Das dargestellte System besteht aus drei deformierbaren Trägern, die im Punkt B gelenkig und im Punkt C über eine Schiebehülse miteinander verbunden sind. Es wird die Streckenlast q_0 belastet. Gesucht ist die Verformung an der Stelle „1" mithilfe des Prinzips der virtuellen Kräfte.
Hinweis: Die Balken sind schubstarr und es sollen keine Normalkrafteinflüsse berücksichtigt werden. Verwenden Sie bei der Bestimmung der virtuellen Formänderungsenergie δW^* und bei der Anwendung des Eins-Kraft-Konzepts die gegebene Koppeltabelle.



a) Skizziere die Momentenflächen $M(x)$ des dargestellten Systems sowie die Momentenflächen $\delta M(x)$ eines virtuellen (oder $\overline{M}(x)$ eines Test-)Systems über die Träger. Markante Punkte sind anzugeben.

b) Berechnen Sie die Verschiebung w_1 an der Stelle „1".

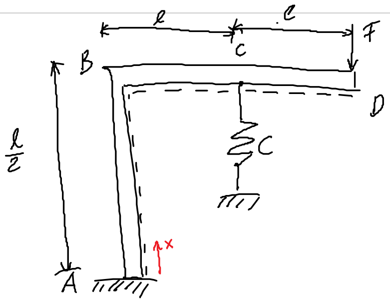
Geg.: q_0, ℓ, EI.

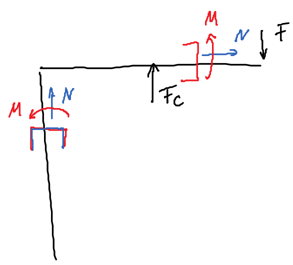
– Koppeltabelle –

C	A	A	B	A, B	A
a	$A \cdot a$	$\frac{1}{2}A \cdot a$	$\frac{1}{2}B \cdot a$	$\frac{1}{2}(A+B) \cdot a$	$\frac{1}{3}a \cdot A$
a	$\frac{1}{2}A \cdot a$	$\frac{1}{3}A \cdot a$	$\frac{1}{6}B \cdot a$	$\frac{1}{6}(2A+B) \cdot a$	$\frac{1}{4}a \cdot A$
a, b	$\frac{1}{2}A \cdot (a+b)$	$\frac{1}{6}A \cdot (2a+b)$	$\frac{1}{6}B \cdot (a+2b)$	$\frac{1}{6}(2Aa+2Bb+Ab+Ba)$	$\frac{1}{12}A(3a+b)$
a	$\frac{2}{3}A \cdot a$	$\frac{1}{3}A \cdot a$	$\frac{1}{3}B \cdot a$	$\frac{1}{3}(A+B) \cdot a$	$\frac{1}{5}a \cdot A$
a	$\frac{2}{3}A \cdot a$	$\frac{5}{12}A \cdot a$	$\frac{1}{4}B \cdot a$	$\frac{1}{12}(5A+3B)a$	$\frac{2}{15}a \cdot A$
a	$\frac{1}{3}A \cdot a$	$\frac{1}{4}A \cdot a$	$\frac{1}{12}B \cdot a$	$\frac{1}{12}(3A+B) \cdot a$	$\frac{1}{5}a \cdot A$

S. 4/4

1)



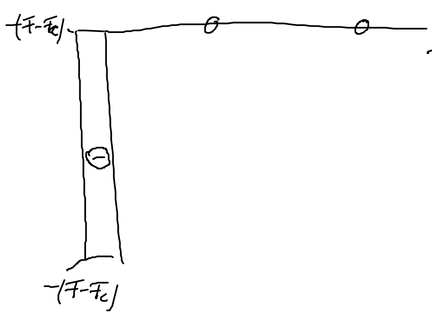


a) $W^* = W^*_{Balken} + W^*_{Feder}$

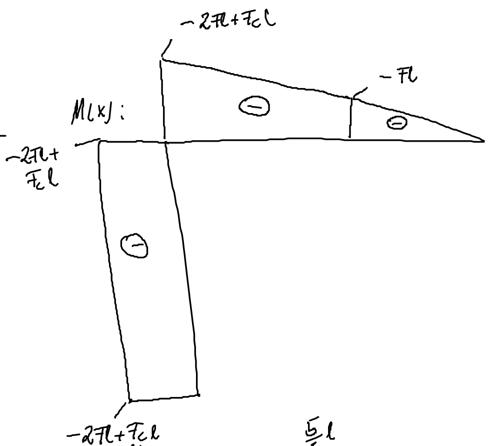
$$W^*_{Balken} = \frac{1}{2EA} \int N^2 dx + \frac{1}{2EI_{yy}} \int M_y^2(x)\,dx + \frac{1}{2GI_p} \int \cancel{M_T^2(x)}^{\,0}\,dx$$

Aufziehverfahren

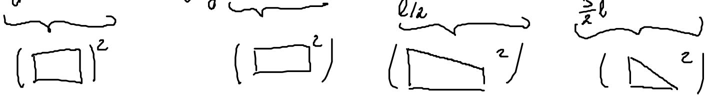
$N(x)$:



$M(x)$:



$$W^*_{Balken} = \frac{1}{2EA} \underbrace{\int_0^{\ell/2} N^2(x)\,dx}_{} + \frac{1}{2EI_{yy}} \underbrace{\int_0^{\ell/2} M_y^2(x)\,dx}_{} + \frac{1}{2EI_{yy}} \underbrace{\int_{\ell/2}^{3\ell/2} M_y^2(x)\,dx}_{} + \frac{1}{2EI} \underbrace{\int_{\frac{3}{2}\ell}^{\frac{5}{2}\ell} M_y^2(x)\,dx}_{}$$



$$= \frac{1}{2EA}\,\frac{l}{2}\,(F-F_c)^2 + \frac{1}{2EI_{yy}}\,\frac{l}{2}\,(-2Fl+F_c l)^2 +$$

$$+\frac{1}{2EI_{yy}}\,l\,\frac{1}{3}\Big((-2Fl+F_c l)^2 + (Fl)^2 - (-2Fl+F_c l)Fl\Big) + \frac{1}{2EI_{yy}}\,l\,\frac{(Fl)^2}{3}$$

$$W^*_{Feder} = \frac{1}{2}\,\frac{F_c^2}{c}$$

$$W^* = \frac{1}{4EA}(F-F_c)^2 l + \frac{1}{2EI_{yy}}\,l^3\Big(\frac{1}{2}(-2F+F_c)^2 + \frac{1}{3}(-2F+F_c)^2 + \frac{1}{3}F^2 - \frac{1}{3}(-2F+F_c)F + \frac{F^2}{3}\Big) + \frac{1}{2}\,\frac{F_c^2}{c}$$

$$= \frac{1}{4EA}(F-F_c)^2 l + \frac{1}{2EI_{yy}}\,l^3\Big(\frac{5}{6}(-2F+F_c)^2 + 2F^2 - \frac{FF_c}{3}\Big) + \frac{1}{2}\,\frac{F_c^2}{c}$$

b)

$$-w_c = \frac{\partial W^*}{\partial F_c} = -\frac{1}{2EA}(F-F_c)l + \frac{1}{2EI_{yy}}\,l^3\Big(\frac{5}{6}\,2\,(-2F+F_c) - \frac{F}{3}\Big) + \frac{F_c}{c}$$

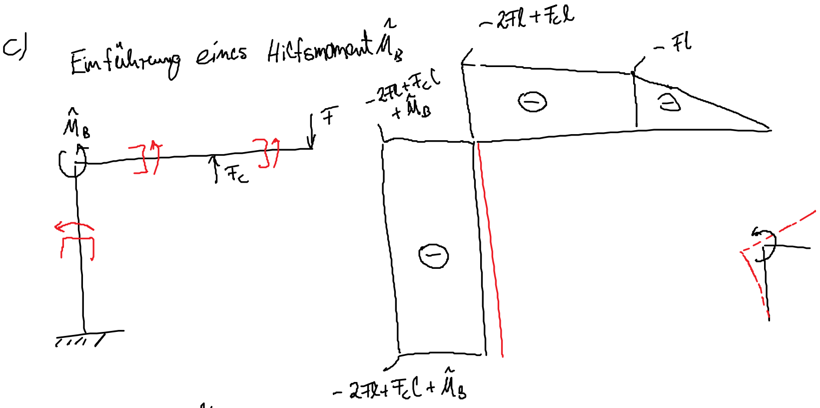
$$= -\frac{1}{2EA}(F-F_c)l + \frac{1}{2EI_{yy}}\,l^3\Big(-\frac{11}{3}F + \frac{5}{3}F_c\Big) + \frac{F_c}{c}$$

mit $F_c = c\,w_c$

$$-w_c = -\frac{1}{2EA}Fl + \frac{cl}{2EA}w_c - \frac{1}{2EI_{yy}}\,\frac{11}{3}Fl^3 + \frac{5}{6}\,\frac{cl^3}{EI_{yy}}w_c + w_c$$

$$w_c\Big(-2 - \frac{cl}{2EA} - \frac{5}{6}\,\frac{cl^3}{EI_{yy}}\Big) = -\frac{Fl}{2EA} - \frac{11}{6}\,\frac{Fl^3}{EI_{yy}} \iff w_c = \frac{\frac{Fl}{2EA} + \frac{11}{6}\frac{Fl^3}{EI_{yy}}}{2 + \frac{cl}{2EA} + \frac{cl^3}{EI_{yy}}}$$

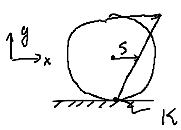
c) Einführung eines Hilfsmoment $\hat{M}_B$



$$\hat{W}^* = \frac{1}{2EI_{yy}}\int_0^{l/2} M_y^2(x)\,dx = \frac{1}{2EI_{yy}}\,\frac{l}{2}\,(-2Fl+F_c l+\hat{M}_B)^2 + \dots$$ Rest, der nicht von $\hat{M}_B$ abhängt

$$\varphi_B = -\frac{\partial \hat{W}^*}{\partial \hat{M}_B}\Big|_{\hat{M}_B=0} = -\frac{1}{2EI_{yy}}\,l\,(-2Fl+F_c l+\hat{M}_B)\Big|_{\hat{M}_B=0} = \frac{F_c l^2 - 2Fl^2}{2EI_{yy}}$$

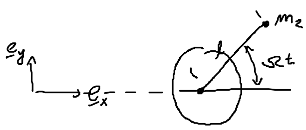
2) a) 1 Punktmasse
1 starrer Körper } 5 Freiheitsgrade: $p = 5$



Zwangsbedingungen:

1.) reines Rollen: $v^K = 0$, $(v_{x,s} = \omega R,\ v_{y,s} = 0)$ → 2 Zwangsbedingungen
2.) $|x_{s,1} - x_{s,2}| = l$ → 1 —"—
3.) Winkelgeschwindigkeit der Masse m_2 ist konstant → 1 —"—
} $\ell = 4$

$$f = p - \ell = 1$$



b)

$$\underline{x}_1 = x_{s,1}\,\underline{e}_x$$

$$\underline{x}_2 = x_{s,1}\,\underline{e}_x + l\cos(\Omega t)\,\underline{e}_x + l\sin(\Omega t)\,\underline{e}_y$$

$$\underline{v}_1 = \dot{x}_{s,1}\,\underline{e}_x$$

$$v_2 = \dot{x}_{s,1}\, e_x - l\Omega \sin(\Omega t)\, e_x + l\Omega \cos(\Omega t)\, e_y$$

$$(T =) E_{kin} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} \Theta^{(S)} \omega^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$$

$$= \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_{s,1}^2 + \frac{1}{2} m_2 \left[(\dot{x}_{s,1} - \Omega l \sin(\Omega t))^2 + \Omega^2 l^2 \cos^2(\Omega t) \right] + \frac{1}{2} \Theta^{(S)} \omega^2$$

$$\underset{\omega = \dot{x}_{s,1}/R}{=} \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_{s,1}^2 + \frac{1}{2} m_2 \left[(\dot{x}_{s,1} - \Omega l \sin(\Omega t))^2 + \Omega^2 l^2 \cos^2(\Omega t) \right] + \frac{1}{2} \frac{\Theta^{(S)}}{R^2} \dot{x}_{s,1}^2$$

$$U = \frac{1}{2} c\, x_{s,1}^2 + m_2 g\, l \sin(\Omega t)$$

$$L = E_{kin} - U = \dots$$

c) $$Q_k^* = F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \quad \text{bzw.} \quad Q_k^* = M_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial q_k}$$

Dämpfer: $$Q_d^* = -d\, \dot{x}_{s,1} \frac{\partial x_{s,1}}{\partial x_{s,1}} = -d\, \dot{x}_{s,1}$$

Moment $M(t)$: $$Q_M^* = M(t) \frac{\partial \phi}{\partial x_{s,1}} = M(t) \frac{\partial}{\partial x_{s,1}} \left(\frac{x_{s,1}}{R} \right) = \frac{1}{R} M(t), \qquad \phi = \frac{x_{s,1}}{R}$$

$$Q_1^* = Q_d^* + Q_M^* = -d\, \dot{x}_{s,1} + \frac{1}{R} M(t)$$

d) $$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = Q_k^* \qquad (k = 1,\ q_k = x_{s,1})$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{s,1}} = m_1 \dot{x}_{s,1} + m_2 (\dot{x}_{s,1} - \Omega l \sin(\Omega t)) + \frac{\Theta^{(S)}}{R^2} \dot{x}_{s,1}$$

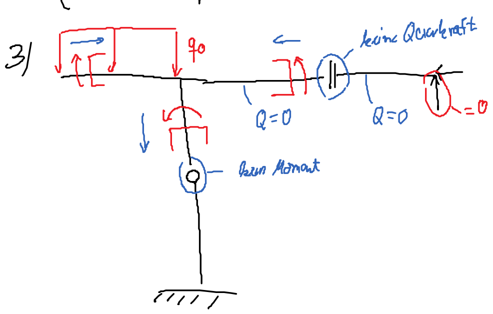
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) = m_1 \ddot{x}_{s,1} + m_2 (\ddot{x}_{s,1} - \Omega^2 l \cos(\Omega t)) + \frac{\Theta^{(S)}}{R^2} \ddot{x}_{s,1}$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} = \frac{\partial L}{\partial x_{s,1}} = -c\, x_{s,1}$$

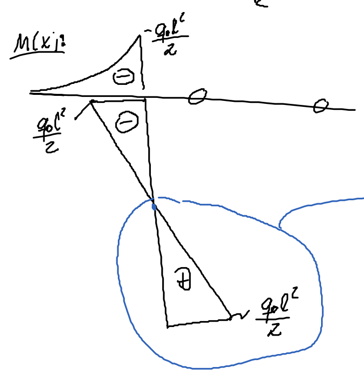
$$\Rightarrow m_1 \ddot{x}_{s,1} + m_2 (\ddot{x}_{s,1} - \Omega^2 l \cos(\Omega t)) + \frac{\Theta^{(S)}}{R^2} \ddot{x}_{s,1} + c\, x_{s,1} = -d\, \dot{x}_{s,1} + \frac{1}{R} M(t)$$

$$\left(m_1 + m_2 + \frac{\Theta^{(S)}}{R^2} \right) \ddot{x}_{s,1} + d\, \dot{x}_{s,1} + c\, x_{s,1} = m_2 \Omega^2 l \cos(\Omega t) + \frac{1}{R} M(t)$$

3)



$M(x)$:



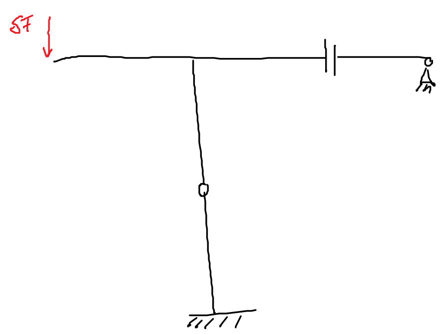
1. Bereich

$$\int_0^l M(x)\, \delta M(x)\, dx = \int_0^l \left(\dots \cdot \dots \right) dx$$

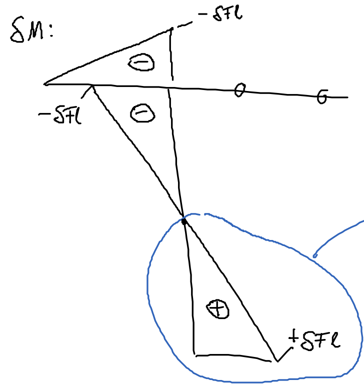
$$= \frac{1}{3} A \Big|_{A = \frac{q_0 l^2}{2}} a \Big|_{a = \delta F l}$$

$$= \frac{1}{3} \frac{q_0 l^2}{2} \delta F l$$

Virtuelles System



δM:



b) $w_1 = \dfrac{\delta W^*}{\delta F}$,

$$\delta W^* = \frac{1}{EI_{yy}} \int M(x)\,\delta M(x)\,dx = \frac{1}{EI_{yy}} \left(\int_0^l \left({}^{\frac{q_0 l^2}{2}} \cdot {}^{\delta F l} \right) dx + \int_0^l \left({}^{-\frac{q_0 l^2}{2}} \cdot {}^{-\delta F l} \right) dx + \int \left({}^{-\frac{q_0 l^2}{2}} \cdot {}^{-\delta F l} \right) dx \right)$$

$$= \frac{1}{EI_{yy}} \left(\frac{1}{3} \frac{q_0 l^2}{2} \delta F l \, l + \frac{1}{3} \left(-\frac{q_0 l^2}{2}\right)\left(-\delta F l\right) l + \frac{1}{4} \left(-\frac{q_0 l^2}{2}\right)\left(-\delta F l\right) l \right)$$

$$= \dots = \frac{11}{24} \frac{q_0 l^4}{EI_{yy}} \delta F$$

$$w_1 = \frac{\delta W^*}{\delta F} = \frac{11}{24} \frac{q_0 l^4}{EI_{yy}}$$