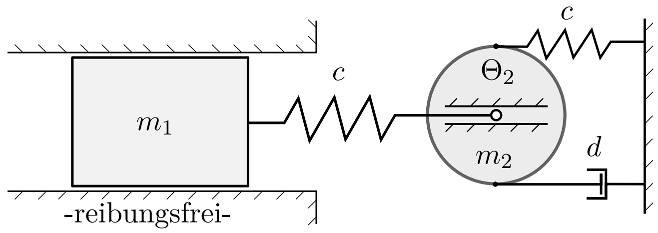
Univ.-Prof. Dr. rer. nat. Wolfgang H. Müller
Technische Universität Berlin
Fakultät V – Institut für Mechanik
Fachgebiet für Kontinuumsmechanik und Materialtheorie
Sekretariat MS 2, Einsteinufer 5, 10587 Berlin

Probeklausur – Energiemethoden der Mechanik WS 2020/21

Kurzfragenteil

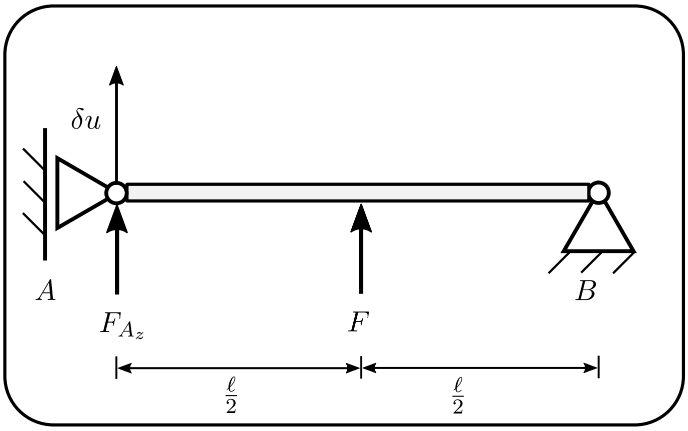
1. Wieviele generalisierte Koordinaten werden benötigt, um das skizzierte Scheibensystem zu beschreiben? **(1 Punkt)**



2. Ein starrer Balken wird durch zwei Festlager statisch gelagert und wie dargestellt durch eine Verminderung der Lagerwertigkeit im Punkt A beweglich gemacht.
   a) Zeichnen Sie den nach dem Prinzip der virtuellen Verrückungen verschobenen Balken in die Skizze ein. **(1 Punkt)**

   b) Geben Sie die virtuelle Arbeit δA in Abhängigkeit der gegebenen Größen und der Kraft F_{A_z} an. **(1 Punkt)**

   Geg.: F, ℓ, δu.

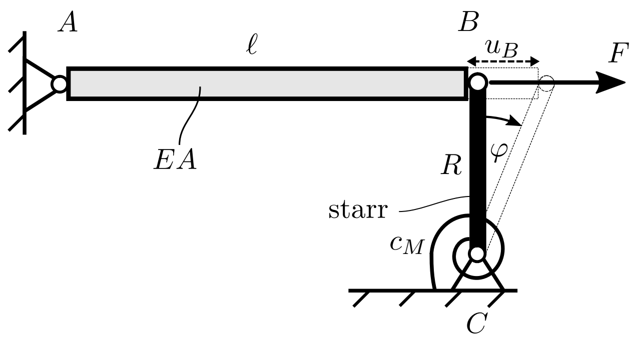


$$0 = \delta A =$$

3. Das dargestellte System besteht aus einem Dehnstab der Länge ℓ, einem starren Hebel der Länge R und einer Drehfeder mit der Federkonstanten c_M.
   a) Geben Sie die komplementäre Formänderungsenergie des Systems W^* an. **(1 Punkt)**

   b) Bestimmen Sie die Verschiebung u_B des Punktes B für den Fall kleiner Auslenkungen mithilfe eines Satzes von Castigliano. **(1 Punkt)**

   Geg.: EA, F, c_M, ℓ, R.



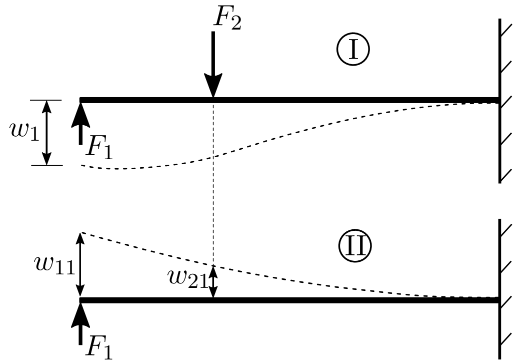
4. Geben Sie die Maßeinheiten der folgenden Größen ausschließlich in den Einheiten: 1, N, kg, m, s und K an. **(1 Punkt)**

Größe	Symbol	Einheit
Formänderungsenergiedichte	w	
Dehnsteifigkeit	EA	

Univ.-Prof. Dr. rer. nat. Wolfgang H. Müller
Technische Universität Berlin
Fakultät V – Institut für Mechanik
Fachgebiet für Kontinuumsmechanik und Materialtheorie
Sekretariat MS 2, Einsteinufer 5, 10587 Berlin

5. Der dargestellte fest eingespannte Balken wird mit den Kräften F_1 und F_2 belastet, wobei die Durchbiegung w_1 gesucht ist (Fall I). Bekannt sind die Durchbiegungen w_{11} und w_{21} an den betreffenden Stellen für den Fall, dass lediglich die Kraft F_1 wirkt (Fall II).
   Geben Sie die Durchbiegung w_1 in den gegebenen Größen an. Nutzen Sie die Beziehungen $\alpha^{kl} = \frac{f^k}{K^l}$ und das Reziprozitätstheorem nach Maxwell und Betti. **(1 Punkt)**

   Geg.: F_1, F_2, w_{11}, w_{21}.



6. Identifizieren Sie in der unten angegebenen Gleichung die folgenden vier Ausdrücke. Tragen Sie das zugehörige Symbol jeweils in das entsprechende Kästchen ein. **(1 Punkt)**

   δB: virtuelle Beschleunigungsarbeit
   δA_f: virtuelle Arbeit der Volumenkräfte
   δA_T: virtuelle Arbeit der Oberflächenkräfte
   δW_S: virtuelle Formänderungsenergie

$$\underbrace{\int_V \sigma_{ji} \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j} \, \mathrm{d}V}_{\boxed{}} = \underbrace{\oint_{\partial V} t_i \delta u_i \, \mathrm{d}A}_{\boxed{}} + \underbrace{\int_V f_i \delta u_i \rho \, \mathrm{d}V}_{\boxed{}} - \underbrace{\int_V \ddot{u}_i \delta u_i \rho \, \mathrm{d}V}_{\boxed{}}$$

7. Gesucht wird eine Differentialgleichung für die Biegelinie $w(x)$ eines Balkens der Länge ℓ mit konstantem Querschnitt mithilfe der Variationsrechnung.

   Leiten Sie ausgehend von der folgenden Gleichung einen Ausdruck für den Momentenverlauf $M(x)$ her. **(1 Punkt)**

$$\delta \int_V \frac{1}{6} G z^2 \left(w''\right)^2 \mathrm{dd}V = \int_0^\ell M(x) \delta w''(x) \, \mathrm{d}x$$

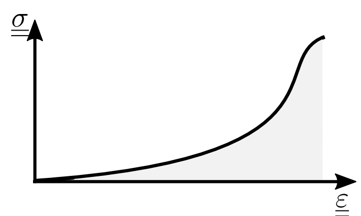
   Geg.: $G = \text{const.}$, $I_{yy} = \int z^2 \, \mathrm{d}A$

8. Kreuzen Sie die für die komplementäre Formänderungsenergiedichte w^* im allgemeinsten Fall richtige Aussage an. **(1 Punkt)**

   ☐ $w^* = \displaystyle\int_{\tilde{\varepsilon}_{ij}=0}^{\tilde{\varepsilon}_{ij}=\varepsilon_{ij}} \sigma_{ij}(\underline{\underline{\tilde{\varepsilon}}}) \, \mathrm{d}\tilde{\varepsilon}_{ij}$

   ☐ $w^* = \displaystyle\int_{\tilde{\sigma}_{ij}=0}^{\tilde{\sigma}_{ij}=\sigma_{ij}} \varepsilon_{ij}(\underline{\underline{\tilde{\sigma}}}) \, \mathrm{d}\tilde{\sigma}_{ij}$

   ☐ $w^* = w$

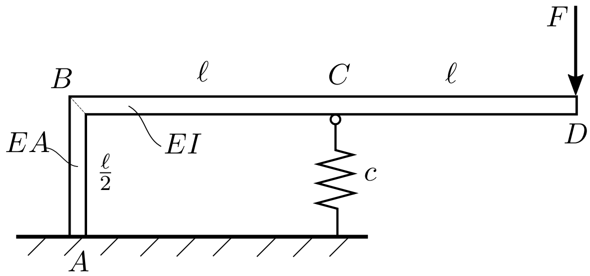


Univ.-Prof. Dr. rer. nat. Wolfgang H. Müller
Technische Universität Berlin
Fakultät V – Institut für Mechanik
Fachgebiet für Kontinuumsmechanik und Materialtheorie
Sekretariat MS 2, Einsteinufer 5, 10587 Berlin

Rechenteil

1 Satz von Castigliano (15 Punkte)

Der dargestellte schubstarre EULER-BERNOULLI Balken der Biegesteifigkeit EI und Dehnsteifigkeit EA ist im Punkt A fest eingespannt. Es wird durch die Kraft F belastet und im Punkt C durch eine Feder zusätzlich abgestützt.



a) Berechnen Sie die Formänderungsenergie des Systems W^* in Abhängigkeit der Federkraft F_C.

b) Wende Sie einen der Sätze von CASTIGLIANO an und berechnen Sie die Verschiebung u_C des Punktes C in Abhängigkeit von den gegebenen Größen.

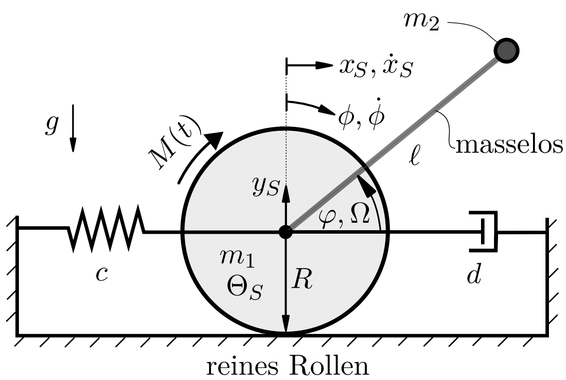
c) Berechnen Sie mithilfe eines der Sätze von CASTIGLIANO den Verdrehwinkel φ_B an der Stelle B.

Hinweis: Für diesen Aufgabenteil können die Kraft F_C und die Verschiebung u_C als gegeben angenommen werden

Geg.: F, c, ℓ, EI, EA.

2 Lagrange-Gleichungen 2. Art (14 Punkte)

Eine auf dem Untergrund rollende Walze der Masse m_1 und dem Radius R ist im Schwerpunkt mit einer Feder und einem Dämpfer gekoppelt. Sie wird durch das Moment $M(t)$ angetrieben. Die zusätzlich über eine masselose starre Verbindung der Länge ℓ angebrachte Punktmasse mit der Masse m_2 wird mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $\Omega = \dot{\varphi} = \text{const.}$ bewegt.



a) Bestimmen Sie die Anzahl der Freiheitsgrade f des Systems mit der Formel $f = p - k$. Geben Sie alle kinematischen Beziehungen an.

b) Bestimmen Sie die Orts- und Geschwindigkeitsvektoren beider Massen und stellen Sie die LAGRANGE-Funktion L des Systems in den generalisierten Koordinaten auf.

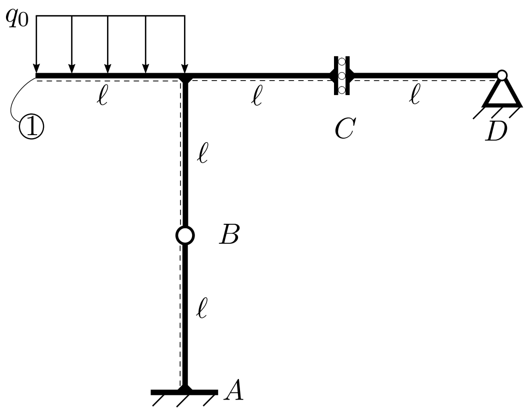
c) Stellen Sie die Summe der nicht-konservativen Kräfte und Momente Q_i^* in den generalisierten Koordinaten auf.

d) Bestimme die Bewegungsdifferentialgleichung des Systems mithilfe der LAGRANGE-Gleichungen 2. Art.

Geg.: m_1, m_2, Θ_S, R, ℓ, c, d, g, Ω, $M(t)$.

Univ.-Prof. Dr. rer. nat. Wolfgang H. Müller
Technische Universität Berlin
Fakultät V – Institut für Mechanik
Fachgebiet für Kontinuumsmechanik und Materialtheorie
Sekretariat MS 2, Einsteinufer 5, 10587 Berlin

3 Prinzip der virtuellen Kräfte (11 Punkte)



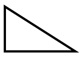
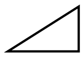
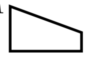
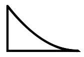
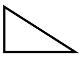
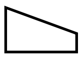
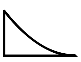
Das dargestellte System besteht aus drei deformierbaren Trägern, die im Punkt B gelenkig und im Punkt C über eine Schiebehülse miteinander verbunden sind. Es wird die Streckenlast q_0 belastet. Gesucht ist die Verformung an der Stelle „1“ mithilfe des Prinzips der virtuellen Kräfte.
Hinweis: Die Balken sind schubstarr und es sollen keine Normalkraftseinflüsse berücksichtigt werden. Verwenden Sie bei der Bestimmung der virtuellen Formänderungsenergie δW^* und bei der Anwendung des Eins-Kraft-Konzepts die gegebene Koppeltabelle.

a) Skizziere die Momentenflächen $M(x)$ des dargestellten Systems sowie die Momentenflächen $\delta M(x)$ eines virtuellen (oder $\overline{M}(x)$ eines Test-)Systems über die Träger. Markante Punkte sind anzugeben.

b) Berechnen Sie die Verschiebung w_1 an der Stelle „1“.

Geg.: q_0, ℓ, EI.

– Koppeltabelle –

C	A 	A 	 B	A  B	A 
a 	$A \cdot a$	$\frac{1}{2}A \cdot a$	$\frac{1}{2}B \cdot a$	$\frac{1}{2}(A+B) \cdot a$	$\frac{1}{3}a \cdot A$
a 	$\frac{1}{2}A \cdot a$	$\frac{1}{3}A \cdot a$	$\frac{1}{6}B \cdot a$	$\frac{1}{6}(2A+B) \cdot a$	$\frac{1}{4}a \cdot A$
a  b	$\frac{1}{2}A \cdot (a+b)$	$\frac{1}{6}A \cdot (2a+b)$	$\frac{1}{6}B \cdot (a+2b)$	$\frac{1}{6}(2Aa+2Bb+Ab+Ba)$	$\frac{1}{12}A(3a+b)$
 a	$\frac{2}{3}A \cdot a$	$\frac{1}{3}A \cdot a$	$\frac{1}{3}B \cdot a$	$\frac{1}{3}(A+B) \cdot a$	$\frac{1}{5}a \cdot A$
a 	$\frac{2}{3}A \cdot a$	$\frac{5}{12}A \cdot a$	$\frac{1}{4}B \cdot a$	$\frac{1}{12}(5A+3B)a$	$\frac{2}{15}a \cdot A$
a 	$\frac{1}{3}A \cdot a$	$\frac{1}{4}A \cdot a$	$\frac{1}{12}B \cdot a$	$\frac{1}{12}(3A+B) \cdot a$	$\frac{1}{5}a \cdot A$