

Aufgabentypen und Hinweise zur Klausur

Aufgabentypen

- *Gib an* : — Ein passender Wert soll angegeben werden (ohne Begründung).
- *Gib explizit an* : — Ein passender Wert soll so weit wie möglich vereinfacht angegeben werden.
- *Berechne* : — Ein passender Wert soll explizit angegeben werden. Zusätzlich ist der Lösungsweg schrittweise anzugeben. Jeder Schritt muss begründet werden.
- *Begründe* : — Eine textuelle Erläuterung soll angegeben werden. Ein Beweis ist zulässig, aber nicht notwendig. Es muss ein klarer und logischer Argumentationsweg erkennbar sein.
- *Beweise* : — Ein formaler Beweis soll angegeben werden. Dabei muss jeder Schritt einzeln ausgeführt und begründet werden. Zum Vergleich habt ihr die Beispiellösungen.
- *Widerlege* : — Analog zu dem vorigen Punkt. In diesem Fall soll das Gegenteil der Behauptung bewiesen werden. (Oft ist hier ein Gegenbeispiel gefragt.)
- *Beweise oder widerlege* : — Hier ist entweder ein formaler Beweis der Aussage oder ein formaler Beweis des Gegenteils der Aussage anzugeben. Zudem muss durch einen Antwortsatz kenntlich gemacht werden, ob ihr die Aussage bewiesen oder widerlegt habt.
- *Zeige* : — Ein entsprechendes formales Verfahren wird verlangt. Dies muss in der Regel schrittweise angewendet werden, z.B. durch Ableitungsbäume.

Hinweise

- Falls eine Fallunterscheidung gemacht wird und diese nicht disjunkt ist, muss begründet werden, warum das okay ist.

Matrikelnummer: _____ Name: _____

Aufgabe 2: Inferenzregeln

(6 Punkte)

- a. (2 Punkte) Gib die Inferenzregeln, die die Menge $\mathbb{N}_7$ definieren, an. $\mathbb{N}_7$ ist die Menge aller natürlichen Zahlen, die durch 7 teilbar sind.

- b. (4 Punkte) Sei σ eine Signatur und $\{ z \} \subseteq X$ eine Menge von Termvariablen. Sei $\{ \varphi(z), \phi(z), \psi(z) \} \subseteq \text{Pr}(X)$ eine Menge von Prädikaten über X .
Zeige, dass die Syntax der Formel $\exists z. \varphi(z) \wedge (\psi(z) \vee \phi(z)) \in \mathbf{P}(X)$ korrekt ist.

Matrikelnummer: _____ Name: _____

(10 Punkte)

Aufgabe 3: Mathematische Beweise

a. (5 Punkte) Beweise $(\forall x. P(x) \vee Q(x)) \rightarrow \forall z. Q(z) \vee P(z)$ im natürlichen Schließen.

b. (5 Punkte) Gegeben ist der folgende Beweis in ProofBuddy.

```
1 lemma deMorgan5: "¬(P ∧ ¬(Q ∧ ¬P)) → ¬P"
2 proof (rule impI)
3   assume A1: "¬(P ∧ ¬(Q ∧ ¬P))"
4   from A1 have A2: "¬P ∨ ¬¬(Q ∧ ¬P)" by (unfold andDeMorgan)
5   from A2 show "¬P"
6   proof (rule orE)
7     assume A3: "¬P"
8     from A3 show "¬P" by assumption
9   next
10    assume A4: "¬¬(Q ∧ ¬P)"
11    from A4 have A5: "(Q ∧ ¬P)" by (unfold dneg)
12    from A5 show "¬P" by (rule andE2)
13 qed
14 qed
```

Beweise $\neg(P \wedge \neg(Q \wedge \neg P)) \rightarrow \neg P$ in natürlicher Sprache entsprechend zum Beweis in ProofBuddy.

Matrikelnummer: _____ Name: _____

Aufgabe 4: Relationen

(20 Punkte)

Gegeben seien die Mengen $A \triangleq \{ 0, 1 \}$, $B \triangleq \{ a, b, c, d \}$, $C \triangleq \{ 1, 2, 3, 4 \}$ und $D \triangleq \{ a, b, c \}$, sowie die Relationen:

$$R_1 : (B, C) \quad \text{mit} \quad R_1 \triangleq \{ (a, 1), (c, 2), (d, 3), (a, 4) \}$$

$$R_2 : (B, B) \quad \text{mit} \quad R_2 \triangleq \{ (a, a), (a, b), (a, c), (b, b), (b, c), (c, c) \}$$

$$R_3 : (B, B) \quad \text{mit} \quad R_3 \triangleq \{ (a, b), (a, d), (c, a), (c, b), (c, d), (d, b) \}$$

$$R_4 : (B, B) \quad \text{mit} \quad R_4 \triangleq \{ (b, a), (c, b), (d, c) \}$$

a. (2 Punkte) Gib die Relation R_1 graphisch an.

b. (1 Punkt) Gib die Relation $\nabla_{D,A}$ in extensionaler Mengenschreibweise an.

c. (2 Punkte) Berechne schrittweise $r(R_2)$ und gib das Ergebnis in extensionaler Mengenschreibweise an.

d. (2 Punkte) Berechne schrittweise $s(R_2)$ und gib das Ergebnis in extensionaler Mengenschreibweise an.

e. (5 Punkte) Berechne schrittweise $t(R_4)$ und gib das Ergebnis in extensionaler Mengenschreibweise an.

Matrikelnummer: _____ Name: _____

- f. (3 Punkte) Gib an, welche der Relationen R_2, R_3 wird zu einer totalen Ordnung, wenn man sie mit Δ_B vereinigt. Begründe, wenn nicht.

- g. (1 Punkt) Beweise oder widerlege: R_1 ist rechtseindeutig.

- h. (2 Punkte) Beweise oder widerlege: Für alle Mengen X, Y und alle Relationen $R : (X, Y)$ gilt, dass R genau dann rechtstotal ist, wenn R^{-1} linkstotal ist.

- i. (2 Punkte) Sei X eine beliebige Menge und R eine beliebige Relation mit $R : (X, X)$. Gib an: Welche Erweiterung von R ist immer eine Quasiordnung.

Matrikelnummer: _____ Name: _____

Aufgabe 5: Abbildungen

(12 Punkte)

Seien die Mengen $A \triangleq \{ m \in \mathbb{N} \mid m \bmod 3 = 1 \}$ und $B \triangleq \{ m \in \mathbb{N} \mid m \bmod 7 = 5 \}$ gegeben. Beweise: $\#(A) = \#(B)$

Gib dazu eine Abbildung $f : A \rightarrow B$ an und beweise, dass sie bijektiv ist.

(Es ist nicht zu beweisen, dass das angegebene f eine Abbildung ist. Ist das angegebene f jedoch keine Abbildung, so werden keine weiteren Punkte vergeben.)

Matrikelnummer: _____ Name: _____

Aufgabe 6: Äquivalenzrelation

(10 Punkte)

Sei $2\mathbb{N} \triangleq \{ 2 \cdot n \mid n \in \mathbb{N} \}$. Wir betrachten die Relation $R : (2\mathbb{N}, 2\mathbb{N})$ mit

$$R \triangleq \{ (a, b) \in 2\mathbb{N} \times 2\mathbb{N} \mid a \bmod 5 = b \bmod 5 \}.$$

a. **(8 Punkte)** Beweise, dass R eine Äquivalenzrelation ist.

Matrikelnummer: _____ Name: _____

Aufgabe 7: Universalität

(11 Punkte)

- a. (4 Punkte) Seien $A \triangleq \{0, 1, 2, 3, 4\}$ und $B \triangleq \{a, b, c\}$. Wir definieren

$$f : A \rightarrow B, \quad f(0) = c, f(1) = b, f(2) = a, f(3) = c, f(4) = c$$

Gib den Kern der von f explizit an und berechne $\#(A) - \#(A/\text{Ker}(f))$.

- b. (2 Punkte) Seien $A \triangleq \{1, 2, 3\}$ und $B \triangleq \{a, b, c, d\}$. Gib explizit an, wie viele Elemente B^A besitzt. Begründe deine Antwort.

- c. (5 Punkte) Seien $B \triangleq \{x \in \mathbb{N} \mid x \bmod 2 = 0\}$, $C \triangleq \{x \in \mathbb{N} \mid x \bmod 3 = 0\}$ und $A : \{1, 2\} \rightarrow M$, wobei $A(1) = B$ und $A(2) = C$.

(i) Gib explizit an: Die Definition von M , sodass A unter den angegebenen Berechnungsvorschriften wohldefiniert ist. (ii) Berechne $\bigcup_{i \in \{1, 2\}} A_i$. (iii) Berechne $\bigcap_{i \in \{1, 2\}} A_i$.

Matrikelnummer: _____ Name: _____

(23 Punkte)

Aufgabe 8: Algebren

- a. (7 Punkte) Sei $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ mit $f(x, y) \triangleq \begin{cases} 0, & \text{falls } x < 10 \wedge y < 10 \\ 10, & \text{sonst} \end{cases}$

Beweise: $(\mathbb{N}, f)$ ist eine Halbgruppe.

- b. (7 Punkte) Gib für die Datenstruktur Queue eine Signatur $\Sigma_{\text{queue}} \triangleq (S, O, \text{ar}, X)$ an.
Gegeben sei die folgende Beschreibung:

- **empty**: Gibt eine leere Queue zurück.
- **enqueue**: Erhält eine natürliche Zahl und eine Queue und gibt die Queue zurück, dessen letztes Element die übergebene natürliche Zahl ist.
- **dequeue**: Erhält eine Queue und gibt eine Queue zurück, dessen erstes Element (sofern vorhanden) entfernt ist; bei leerer Queue gibt sie eine leere Queue zurück.
- **first**: Erhält eine Queue und gibt das erste Element zurück.
- **length**: Erhält eine Queue und gibt die Länge der Queue zurück.
- **zero**: Gibt 0 zurück.
- **succ**: Erhält eine natürliche Zahl und gibt die nächst größere natürliche Zahl zurück.

Matrikelnummer: _____

— Name: _____

- c. (4 Punkte) Um eine Σ_{queue} -Algebra Q zu konstruieren, setzen wir $Q_{\text{nat}} \triangleq \mathbb{N}$ und $Q_{\text{queue}} \triangleq \mathbb{N}^*$. Gib eine Interpretationen für dequeue_Q und enqueue_Q , die die Anforderungen aus b) implementiert, an.

- d. (5 Punkte) Wir definieren $\Sigma \triangleq (S, O, \text{ar})$ mit

- $S \triangleq \{ \text{elem}, \text{stack} \}$,
- $O \triangleq \{ \text{empty}, \text{push}, \text{pop}, \text{top} \}$, und
- $\text{ar} : O \rightarrow S^*$ mit

$\text{empty} \mapsto (\text{stack})$
 $\text{push} \mapsto (\text{elem}, \text{stack}, \text{stack})$
 $\text{pop} \mapsto (\text{stack}, \text{stack})$
 $\text{top} \mapsto (\text{stack}, \text{elem})$

Zeige, dass $\text{push}(\text{top}(\text{empty}), \text{empty})$ ein syntaktisch korrekt gebildeter Grundterm zu Σ ist.

Aufgabe 9: Induktion

(8 Punkte)

Seien $S \triangleq \{ \text{elem}, \text{list} \}$, $O \triangleq \{ \text{nil}, \text{cons}, \text{append}, \text{reverse} \}$ und sei $\text{ar} : O \rightarrow S^*$ gegeben durch

$\text{nil} \mapsto (\text{list})$
 $\text{cons} \mapsto (\text{elem}, \text{list}, \text{list})$
 $\text{append} \mapsto (\text{list}, \text{list}, \text{list})$
 $\text{reverse} \mapsto (\text{list}, \text{list})$

Sei $X \triangleq (X_s)_{s \in S}$ mit $X_{\text{elem}} \triangleq \{x\}$ und $X_{\text{list}} \triangleq \{l, l_1, l_2\}$.

Sei $\Sigma \triangleq (S, O, \text{ar}, X)$. Definierende Gleichungen für append und reverse sind:

$\text{append}(\text{nil}, l) = l$ (append_nil)
 $\text{append}(\text{cons}(x, l_1), l_2) = \text{cons}(x, \text{append}(l_1, l_2))$ (append_cons)
 $\text{reverse}(\text{nil}) = \text{nil}$ (rev_nil)
 $\text{reverse}(\text{cons}(x, l)) = \text{append}(\text{reverse}(l), \text{cons}(x, \text{nil}))$ (rev_cons)

Hinweis: Weiterhin gilt:

$t = t$ (refl)
 $\text{reverse}(l) = \text{append}(\text{reverse}(l), \text{nil})$ (append_right_nil)
 $\text{append}(\text{append}(l_1, l_2), l_3) = \text{append}(l_1, \text{append}(l_2, l_3))$ (app_assoc)

```

1 lemma rev_app: "rev (l1 @ l2) = (rev l2) @ (rev l1)"
2 proof (induction l1)
3   case nil
4     have "rev [] @ l2 = rev l2" by (unfold append_nil, rule refl)
5     also have "... = (rev l2) @ []" by (unfold app_right_nil, rule refl)
6     also have "... = (rev l2) @ (rev [])" by (unfold rev_nil, rule refl)
7     finally show "rev [] @ l2 = (rev l2) @ (rev [])" by assumption
8   next
9     case cons
10    fix x::'a
11    fix l
12    assume Ind_Hyp: "rev (l @ l2) = rev l2 @ rev l"
13    have "rev ((x # l) @ l2) = rev (x # (l @ l2))" by (unfold append_cons, rule refl)
14    also have "... = (rev l2) @ (x # [])" by (unfold rev_cons, rule refl)
15    also have "... = (rev l2 @ rev l) @ (x # [])" by (unfold Ind_Hyp, rule refl)
16    also have "... = rev l2 @ (rev l @ (x # []))" by (unfold app_assoc, rule refl)
17    also have "... = rev l2 @ rev (x # l)" by (unfold rev_cons, rule refl)
18    finally show "rev ((x # l) @ l2) = rev l2 @ rev (x # l)" by assumption
19  qed

```


Matrikelnummer: _____ Name: _____

Beweise: $\text{reverse}(\text{append}(l_1, l_2)) = \text{append}(\text{reverse}(l_2), \text{reverse}(l_1))$ mit struktureller Induktion entsprechend zum angegebenen ProofBuddy-Beweis.