

Formale Sprachen und Automaten

Prof. Dr. Uwe Nestmann - 08. Februar 2016

Schriftlicher Test (Probe) - Einsicht

Aufgabenübersicht:

AUFGABE	SEITE	PUNKTE	THEMENBEREICH
1	3	14	MODELLE REGULÄRER SPRACHEN
2	4	23	GRENZEN REGULÄRER SPRACHEN
3	5	13	MODELLE KONTEXTFREIER SPRACHEN

Hinweise

Hilfsmittel nur die Formelsammlung (ausgedruckt, ohne zusätzliche Pfeile, Symbole oder Text)

Papier Im schriftlichen Test bekommt ihr Papier und dürft auch kein eigenes Papier benutzen. Im Probe-Test benutzt bitte Eurer eigenes Papier.

Stifte Im Probe-Test ist es egal womit Ihr schreibt. Im schriftlichen Test sind nur dokumentenechte Stifte (nichts was sich weg killern oder radieren lässt) in blauer oder schwarzer Farbe erlaubt.

Zeit Der schriftliche Test dauert 75 Minuten. Zusätzlich bekommt Ihr 15 Minuten zum Lesen der Aufgabenstellungen. Ihr dürft selbst entscheiden, ob Ihr die 15 Minuten dazu nutzen wollt, erst alle Aufgaben in Ruhe zu lesen, oder ob Ihr die 15 Minuten aufteilt und erstmal nur eine Aufgabe lest und gleich bearbeitet. Deshalb dürft Ihr auch innerhalb der 15 Minuten Lesezeit bereits schreiben. Der Probe-Test ist verkürzt auf 37.5 Minuten und 7.5 Minuten Einlese-Zeit.

Aufgabentypen Der Probe-Test soll Euch eine Vorstellung vom schriftlichen Test geben. Er ist allerdings verkürzt. Gerade viele eher einfache Aufgabentypen (Minimierung, Untermengen-Konstruktion) wurden weg gelassen. Der schriftliche Test kann also Aufgabentypen haben, die sich im Probe-Test nicht finden.

Aufgabenreihenfolge Die Aufgabenreihenfolge orientiert sich grob an der Reihenfolge des Stoffes in der Veranstaltung und NICHT am Schwierigkeitsgrad der Aufgaben. Es ist also ratsam selbst (nach den eigenen Vorlieben und Kenntnissen) zu entscheiden, welche Aufgaben Ihr zuerst macht. Das gilt für den Probe-Test und den schriftlichen Test.

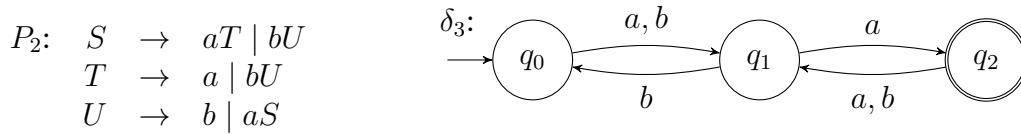
Aufgabe 1: Modelle Regulärer Sprachen

(14 Punkte)

Gegeben seien das Alphabet $\Sigma \triangleq \{ a, b \}$, die reguläre Sprache

$A_1 \triangleq \{ w \in \Sigma^* \mid (|w|_a - |w|_b) \bmod 3 = 0 \}$, die reguläre Grammatik

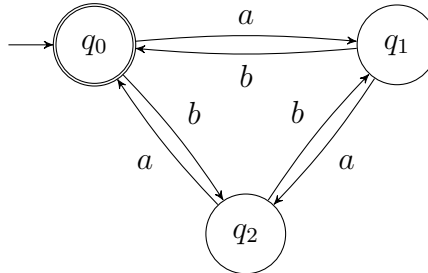
$G_2 \triangleq (\{ S, T, U \}, \Sigma, P_2, S)$ und der DFA $M_3 \triangleq (\{ q_0, q_1, q_2 \}, \Sigma, \delta_3, q_0, \{ q_2 \})$ mit:



a. (**, 4 Punkte) Gib einen DFA M_1 mit $L(M_1) = A_1$ an.

Lösung

$M_1 = (\{ q_0, q_1, q_2 \}, \Sigma, \delta_1, q_0, \{ q_0 \})$ mit $\delta_1:$

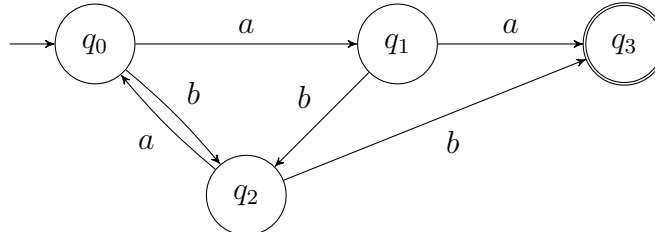


/Lösung

b. (**, 4 Punkte) Gib einen NFA M_2 mit $L(M_2) = L(G_2)$ an.

Lösung

$M_2 = (\{ q_0, q_1, q_2, q_3 \}, \Sigma, \Delta_1, \{ q_0 \}, \{ q_3 \})$ mit $\Delta_1:$



/Lösung

c. (***, 3 Punkte) Gib $L(G_2)$ an, ohne auf Automaten oder Grammatiken zu verweisen.

Lösung

$L(G_2) = \{ xy \mid x \in \{ aba, ba \}^* \wedge y \in \{ aa, abb, bb \} \}$

/Lösung

d. (*, 1 Punkt) Gib die Ableitung des Wortes aaa in M_3 an.

Lösung

$(q_0, aaa) \vdash_{M_3} (q_1, aa) \vdash_{M_3} (q_2, a) \vdash_{M_3} (q_1, \lambda) \not\vdash_{M_3}$

/Lösung

e. (***, 2 Punkte) Gib $L(M_3)$ an, ohne auf Automaten oder Grammatiken zu verweisen.

Lösung

$L(M_3) = \{ va \mid v \in \Sigma^* \wedge |v| \bmod 2 = 1 \}$

/Lösung

Aufgabe 2: Grenzen Regulärer Sprachen

(23 Punkte)

Gegeben sei die Sprache $A \triangleq \{ w \in \{ ab, c \}^* \mid |w|_{ab} > |w|_c \}$ über dem Alphabet $\{ a, b, c \}$.

- a. (***, 11 Punkte) Beweise nur mit Hilfe des Pumping Lemma, dass die Sprache A nicht regulär ist.

Lösung

Sei $n \in \mathbb{N}$ (beliebig aber fest). Wir wählen das Wort $w = c^n (ab)^{n+1}$ mit $w \in A$ und $|w| \geq n$. Sei $w = xyz$ eine beliebige Zerlegung mit $y \neq \lambda$ und $|xy| \leq n$. Dann ist $x = c^i$, $y = c^j$ und $z = c^{n-i-j} (ab)^{n+1}$ für ein $j \neq 0$ und $i + j \leq n$. Wir wählen $k = 2$. Dann ist $xy^2z = c^{n+j} (ab)^{n+1}$. $xy^2z \notin A$, denn $n + j \geq n + 1$ für $j \neq 0$. Da $\neg\text{PUMP}(A_1)$, ist A_1 nach dem Pumping-Lemma nicht regulär.

/Lösung

- b. (***, 8 Punkte) Gib alle Myhill-Nerode Äquivalenzklassen für die Sprache A an.

Hinweis: Die Namen der Klassen in der Form $[0]$ genügen hier nicht. Es müssen auch die zugehörigen Mengen, also so etwas wie $[0] = \{ \dots \}$ oder $[0] = L(\dots)$, angegeben werden.

Lösung

$$\begin{aligned} [c^l]_{\equiv_A} &= \{ w \in \{ ab, c \}^* \mid |w|_c - |w|_{ab} = l \} && \text{für } l \in \mathbb{N} \\ [c^k a]_{\equiv_A} &= \{ wa \in \{ ab, c \}^* \mid |w|_c - |w|_{ab} = k \} && \text{für } k \in \mathbb{N} \\ [(ab)^j]_{\equiv_A} &= \{ w \in \{ ab, c \}^* \mid |w|_{ab} - |w|_c = j \} && \text{für } j \in \mathbb{N}^+ \\ [(ab)^i a]_{\equiv_A} &= \{ wa \in \{ ab, c \}^* \mid |w|_{ab} - |w|_c = i \} && \text{für } i \in \mathbb{N}^+ \\ [b]_{\equiv_A} &= \{ bx, xaay, xacy, xbbby, xcby \mid x, y \in \{ a, b, c \}^* \} \end{aligned}$$

/Lösung

- c. (***, 4 Punkte) Beweise nur mit den eben angegebenen Äquivalenzklassen, dass A nicht regulär ist.

Lösung

Zu Zeigen: $[c^l]_{\equiv_A} \neq [c^k]_{\equiv_A}$ für alle $l < k$

Seien $l, k \in \mathbb{N}$ mit $l < k$. Es gilt $c^l \in [c^l]_{\equiv_A}$ und $c^k \in [c^k]_{\equiv_A}$. Betrachte $z = (ab)^{l+1}$.

Dann gilt $c^l z \in A$ aber $c^k z \notin A$, weil $l < k$ (und damit $l + 1 \leq k$). Damit ist der Index von \equiv_A unendlich und mit Theorem 4.3.5 ist A nicht regulär.

/Lösung

Aufgabe 3: Modelle Kontextfreier Sprachen

(13 Punkte)

Gegeben seien das Alphabet $\Sigma \triangleq \{ a, b, c \}$ und die kontextfreie Sprache $A_1 \triangleq \{ vab^nc \mid n \in \mathbb{N}^+ \wedge v \in \Sigma^* \wedge |v|_c + n = |v|_a + 1 \}$.

- a. (**, 5 Punkte) Gib eine kontextfreie Grammatik G_1 mit $L(G_1) = A_1$ an.

----- Lösung -----

$G_1 = (\{ S, T, U \}, \Sigma, P_1, S)$ mit

$P_1: S \rightarrow Tc$

$T \rightarrow ab \mid aTb \mid UT$

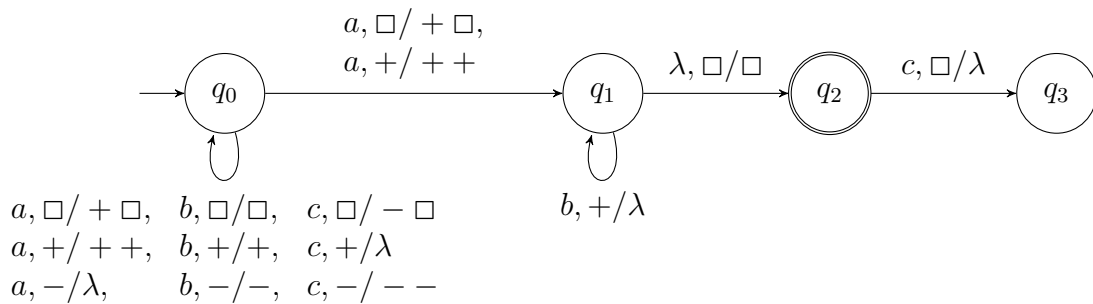
$U \rightarrow b \mid ac \mid ca \mid bU \mid UU \mid acU \mid caU \mid aUc \mid cUa \mid Uac \mid Uca$

----- /Lösung -----

- b. (**, 8 Punkte) Gib einen PDA M_1 mit $L_{\text{End}}(M_1) \cdot \{ c \} = A_1$ und $L_{\text{Kel}}(M_1) = A_1$ an.

----- Lösung -----

$M_1 = (\{ q_0, q_1, q_2, q_3 \}, \Sigma, \{ \square, +, - \}, \square, \Delta_1, q_0, \{ q_2 \})$ mit Δ_1 :



----- /Lösung -----