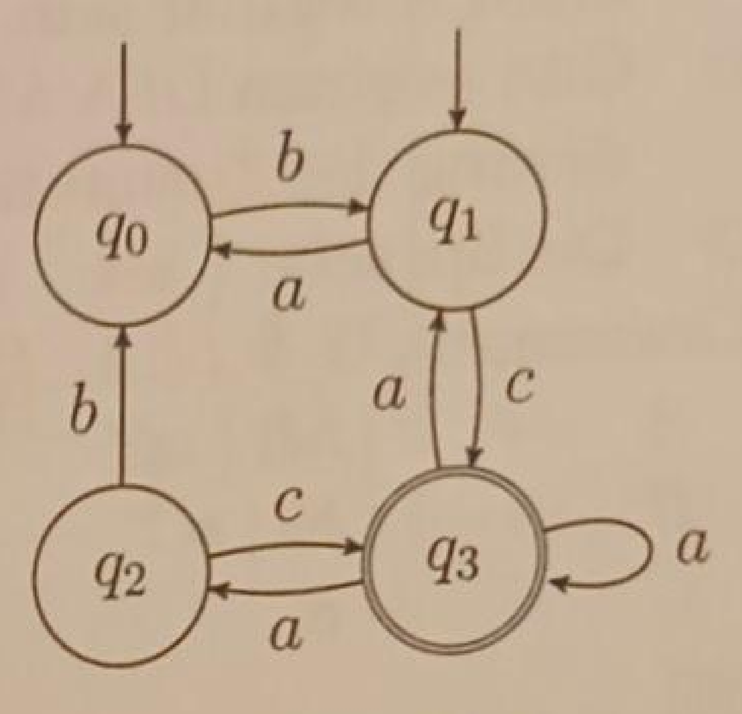
Aufgabe 1: Modelle Regulärer Sprachen

(27 Punkte)

Gegeben seien das Alphabet $\Sigma \triangleq \{ a, b, c \}$, die Grammatik $G_1 \triangleq (\{ S, T, U, M, N \}, \Sigma, P_1, S)$, der NFA $M_2 \triangleq (\{ q_0, q_1, q_2, q_3 \}, \Sigma, \Delta_2, \{ q_0, q_1 \}, \{ q_3 \})$ und die Sprache $A_3 \triangleq \{ cc, ccxy \mid x \in \{ ba, bb \}^+ \wedge y \in \Sigma^* \wedge (|y| > 0 \rightarrow (y)_1 = c) \}$ mit:

$$
\begin{array}{llcl}
P_1: & S & \rightarrow & bS \mid a \mid cT \\
 & T & \rightarrow & bU \mid aM \\
 & U & \rightarrow & bN \mid aU \\
 & M & \rightarrow & b \mid bU \mid aM \\
 & N & \rightarrow & bT \mid aN
\end{array}
$$

Δ_2:



a. **(5 Punkte)** *Gib* $\mathrm{L}(G_1)$ *an*, ohne auf Automaten oder Grammatiken zu verweisen.

b. **(9 Punkte)** *Gib* $\mathrm{L}(M_2)$ *an*, ohne auf Automaten oder Grammatiken zu verweisen.

c. **(8 Punkte)** *Gib* einen DFA M_3 mit $\mathrm{L}(M_3) = A_3$ *an*.

d. **(5 Punkte)** *Kreuze an, welche der folgenden Aussagen korrekt sind und welche nicht.*
Sei Σ ein Alphabet und $A \subseteq \Sigma^*$ eine Sprache über Σ.
Hinweis: w= wahr, f=falsch

w f

Sei A eine beliebige Sprache, dann gilt $A^+ \subsetneq A^*$.

Falls für eine Sprache A die Pump-Eigenschaft gilt, also **PUMP-REG** (A), so muss A regulär sein.

Gibt es einen DFA M, der die Sprache A akzeptiert, so lässt sich, ohne Veränderung der Zustandsmenge, aus M ein DFA M' ableiten mit $\mathrm{L}(M') = \Sigma^* \setminus A$.

Die Sprache $\{ ww^R \mid w \in \Sigma^* \}$ ist regulär.

Die Grammatik $G \triangleq (\{ A, B, C \}, \{ a, b, c \}, P, A)$ mit den Produktionen

$$
\begin{aligned}
P:\quad A &\rightarrow \varepsilon \mid bB \mid aC \\
B &\rightarrow b \mid bb \mid bC \\
C &\rightarrow c \mid a
\end{aligned}
$$

ist von

Typ 1

Typ 2

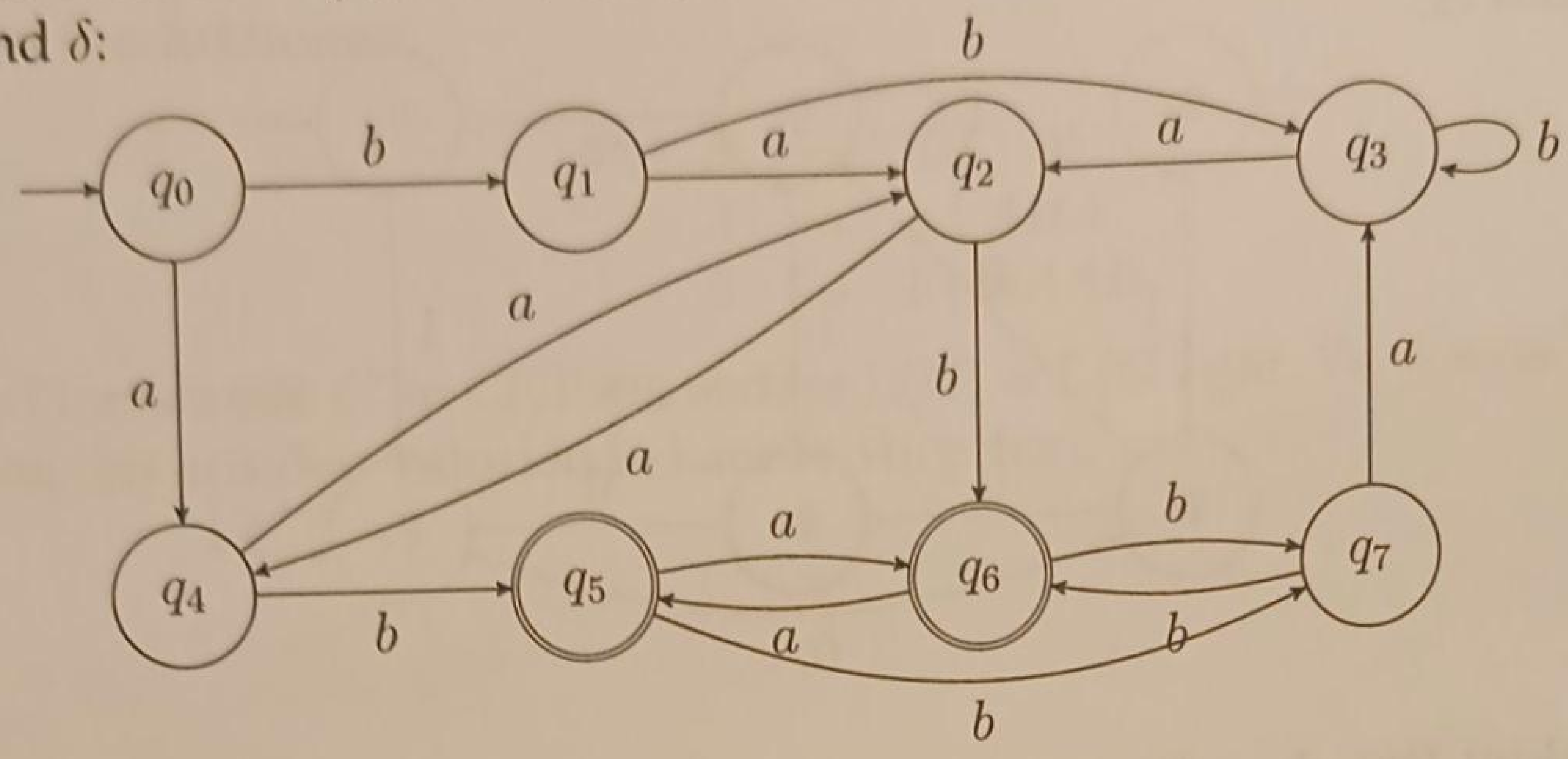
Typ 3

Sei M_1 ein minimaler DFA mit $\mathrm{L}(M_1) = A$. Sei M_2 der A- Äquivalenzklassenautomat. Die Automaten M_1 und M_2 sind isomorph.

Aufgabe 2: Minimierung eines DFA

(20 Punkte)

Gegeben sei der DFA $M \triangleq (Q, \Sigma, \delta, q_0, \{ q_5, q_6 \})$ mit $Q = \{ q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_7 \}$, $\Sigma = \{ a, b \}$ und δ:



a. **(7.5 Punkte)** *Gib an:* Fülle die folgende Tabelle entsprechend des Table-Filling-Algorithmus zum Minimieren von DFAs aus. Verwende Kreuze (x) für nicht äquivalente und Kreise (o) für äqui- valente Zustände (äquivalent im Sinne von FS 2.3.2 bzw. 2.3.8).
Hinweis: Bitte streiche zunächst alle Zeilen und Spalten für nicht erreichbare Zustände, falls es solche Zustände in M gibt.

Ersatztabelle
(falls ein zweiter Ansatz nötig ist)

q_1							
q_2							
q_3							
q_4							
q_5							
q_6							
q_7							
	q_0	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6

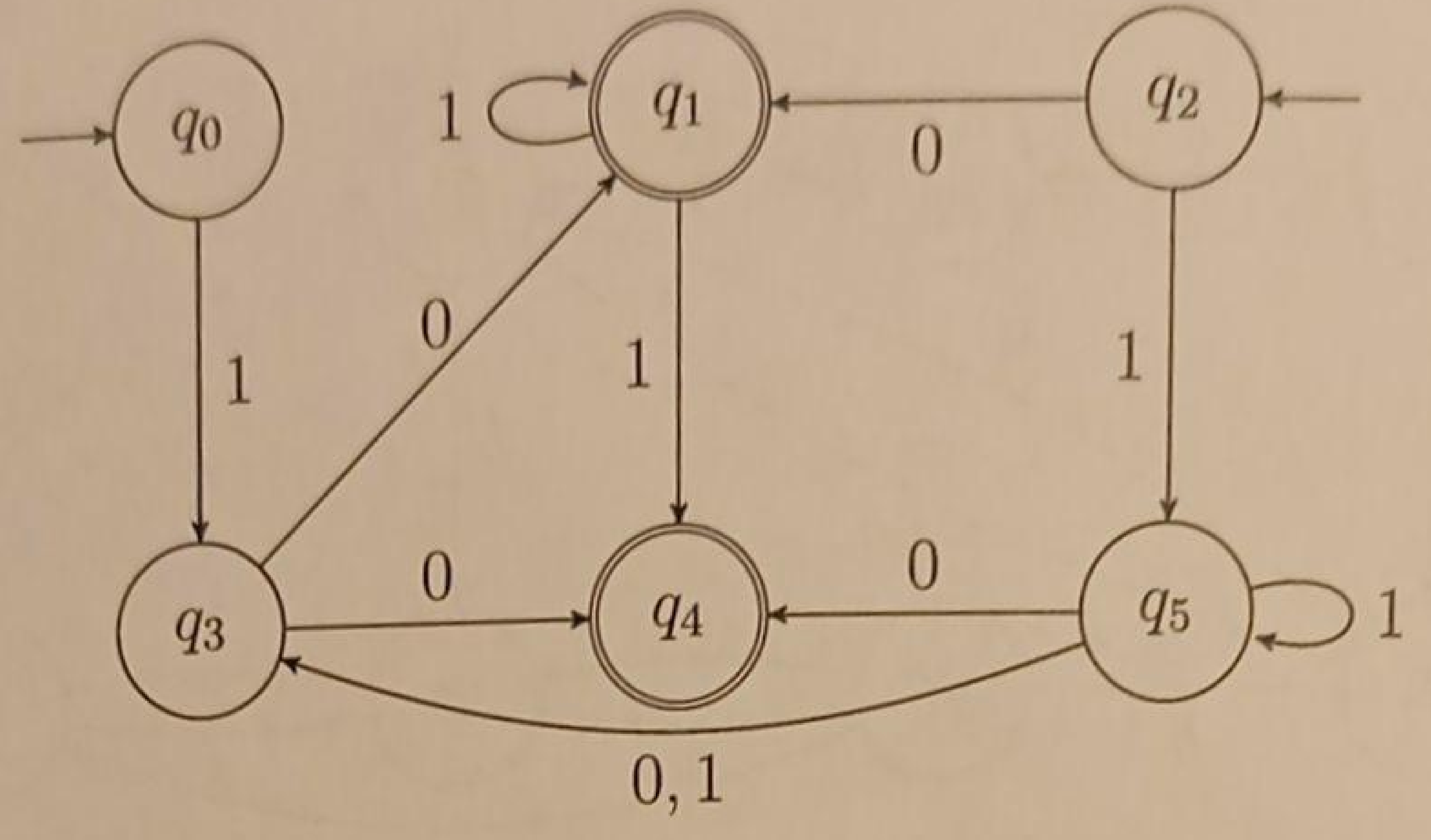
b. **(4 Punkte)** Die Minimierung unterteilt Q in Äquivalenzklassen. *Gib* alle Äquivalenzklassen an, die sich aus der Tabelle ergeben.
Hinweis: Die Namen der Klassen in der Form $[q_0]$ genügen hier nicht. Es müssen auch die zugehörigen Mengen, also so etwas wie $[q_0] = \{ \dots \}$, angegeben werden.

c. **(5 Punkte)** *Gib* den minimierten DFA M' an, ohne auf die Tabelle zu verweisen.

d. **(3.5 Punkte)** *Gib* $L(M)$ an, ohne auf Automaten oder Grammatiken zu verweisen.

Aufgabe 3: Untermengen-Konstruktion **(19 Punkte)**

Gegeben sei der NFA $M \triangleq (\{ q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5 \}, \Sigma, \Delta, \{ q_0, q_2 \}, \{ q_1, q_4 \})$ mit $\Sigma = \{ 0, 1 \}$ und Δ:



a. **(13 Punkte)** *Berechne:* Konstruiere nur mit Hilfe der Untermengen-Konstruktion den DFA M' zum NFA M. *Gib* die bei der Untermengen-Konstruktion entstehende Tabelle sowie das Tupel des entstehenden Automaten M' *an.*
Hinweis: Es ist nicht nötig die Übergangsfunktion δ' von M' zusätzlich (z.B. graphisch) anzugeben.

b. **(6 Punkte)** *Gib* $\mathrm{L}(M)$ *an*, ohne auf Automaten oder Grammatiken zu verweisen.

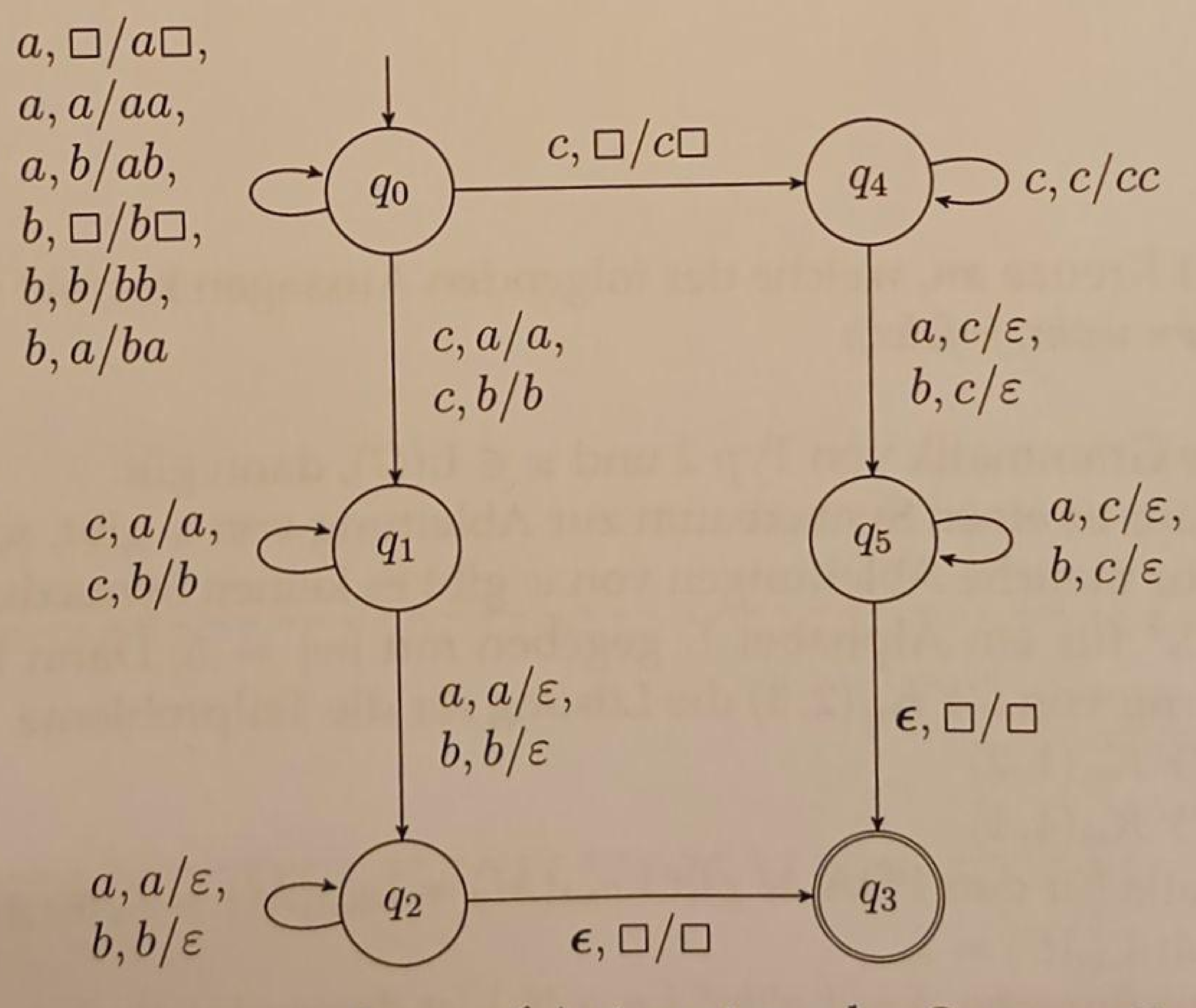
Aufgabe 4: Modelle Kontextfreier Sprachen (24 Punkte)

a. **(5 Punkte)** Gegeben sei die Grammatik $G \triangleq (\{\, S,\ A,\ B \,\},\ \{\, a,\ b \,\},\ P,\ S)$ mit den folgenden Produktionen:

$$
\begin{aligned}
P\colon\quad S &\rightarrow aB \mid Ab \\
A &\rightarrow a \mid ABA \\
B &\rightarrow b \mid BAAB
\end{aligned}
$$

Gib eine Grammatik G' in CNF an, sodass $\mathrm{L}(G) = \mathrm{L}(G')$ gilt. Verwende bei der Erstellung das aus den Tutorien bekannte Vorgehen.

b. **(8 Punkte)** Gegeben seien das Alphabet $\Sigma \triangleq \{\, a,\ b,\ c \,\}$, das Kelleralphabet $\Gamma \triangleq \{\, a,\ b,\ c,\ \square \,\}$ und der PDA $M \triangleq (\{\, q_0,\ q_1,\ q_2,\ q_3,\ q_4,\ q_5 \,\},\ \Sigma,\ \Gamma,\ \square,\ \Delta,\ q_0,\ \{\, q_3 \,\})$ mit Δ:



Gib $\mathrm{L}_{\mathrm{End}}(M)$ und $\mathrm{L}_{\mathrm{Kel}}(M)$ an, ohne auf Automaten oder Grammatiken zu verweisen.

c. **(6 Punkte)** Gegeben sei die Sprache $A = \{\ b^n a b^n,\ b^n c a^m c b^n \mid n \in \mathbb{N}\ \wedge\ m \in \mathbb{N}^+\ \}$. Gib eine Typ-2-Grammatik G mit $\mathrm{L}(G)$ an.

d. **(5 Punkte)** *Kreuze* an, welche der folgenden Aussagen korrekt sind und welche nicht.
Hinweis: w= wahr, f=falsch

w f

Sei G eine Grammatik von Typ 2 und $w \in \mathrm{L}(G)$, dann gilt:

- Falls es einen Syntaxbaum zur Ableitung von w gibt, so ist er eindeutig.
- Für manche Ableitungen von w gibt es keinen Syntaxbaum.

Sei $w \in \Sigma^*$ für ein Alphabet Σ gegeben mit $|w| = 5$. Dann benötigt man zur Bestimmung von $CYK_w(2,3)$ die Lösung für die Teilprobleme

- $CYK_w(1,2)$
- $CYK_w(4,1)$

- Falls für den PDA M gilt $\mathrm{L}_{\mathrm{End}}(M) = \mathrm{L}_{\mathrm{Kel}}(M) = L$, so gibt es einen NFA M' mit $\mathrm{L}(M') = L$.
- Die Sprache $A = \{\ a^n b c^n \mid n \in \mathbb{N}\ \}$ ist deterministisch kontextfrei.
- Sei A eine reguläre Sprache, dann gibt es immer einen DPDA M mit $\mathrm{L}_{\mathrm{Kel}}(M) = A$.

Aufgabe 5: Induktion **(13 Punkte)**

Gegeben sei das Alphabet $\Sigma \triangleq \{ a, b \}$.
Beweise per Induktion: $\forall v \in \Sigma^*. |vv^R| \mod 2 = 0$.
Hinweis: *Es darf verwendet werden, dass für alle* $x, y \in \mathbb{N}$

$$(x + y) \mod 2 = ((x \mod 2) + (y \mod 2)) \mod 2 \tag{H1}$$

Aufgabe 6: Beweise

(10 Punkte)

Gegeben sei die Relation $R \triangleq \{ (a,\ b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid a \leq b \}$.
Beweise, dass R ist eine Quasiordnung.

Aufgabe 7: Pumping-Lemma

(12 Punkte)

Gegeben seien das Alphabet $\Sigma \triangleq \{ a,\ b,\ c \}$ und die Sprache
$A \triangleq \{ a^i b^j c a^k b^l \mid i, j, k, l \in \mathbb{N} \land j \mod 3 = 1 \land j < l \}$
Beweise mithilfe des Pumping-Lemmas, dass die Sprache A nicht regulär ist.

Aufgabe 8: Myhill-Nerode (regulär) **(13 Punkte)**

Gegeben sei das Alphabet $\Sigma \triangleq \{ a, b, c \}$, sowie die über Σ definierte Sprache $A \triangleq \{ uav \mid u \in \{ b, c \}^* \land v \in \Sigma^* \land |uv|_b \bmod 2 = 0 \}$.

a. **(8 Punkte)** *Gib* alle Äquivalenzklassen der Myhill-Nerode-Relation bezüglich der Sprache A an.
Hinweis: Die Namen der Klassen in der Form $[q_0]$ genügen hier nicht. Es müssen auch die zugehörigen Mengen, also so etwas wie $[q_0] = \{ \dots \}$, angegeben werden.

b. **(5 Punkte)** *Gib* den A-Äquivalenzklassenautomaten M_A *an.*

Aufgabe 9: Myhill-Nerode (nicht regulär) (22 Punkte)

Sei das Alphabet $\Sigma \triangleq \{ a,\ b,\ c,\ d \}$ sowie die über Σ definierte Sprache $B \triangleq \{ a^n w \mid n \in \mathbb{N}^+ \wedge w \in \{ b,\ c \}^* \wedge |w|_b \leq n \}$ gegeben.

a. **(19 Punkte)** Hier geht es um die Äquivalenzklassen der Myhill-Nerode-Relation bezüglich B. *Gib* die Äquivalenzklassen und die dazugehörige Suffixsprachen *an.*

Äquivalenz-klasse	(in Mengenschreibweise)	**Suffixsprache der Klassenelemente**
$[\,\varepsilon\,]_{\equiv_B} =$		
$[\,a^l\,]_{\equiv_B} =$ $l \in$		
$[\,ab\,]_{\equiv_B} =$		
$[\,a^k c\,]_{\equiv_B} =$ $k \in$		
$[\,ba\,]_{\equiv_B} =$	$\{ a^n w \mid n \in \mathbb{N}^+ \wedge w \in \{ b,\ c \}^* \wedge |w|_b > n \}$ $\cup \{ xbyaz, xcyaz \mid x, y, z \in \Sigma^* \}$ $\cup \{ bw, cw \mid w \in \Sigma^* \}$	

b. **(3 Punkte)** *Begründe:* Ist die Darstellung von $[\,ba\,]_{\equiv_B}$ in Mengenschreibweise korrekt? Falls nein, *gib* die korrekte Menge *an.*

(5 Punkte)

Aufgabe 10: Beweise

Kreuze an, welche der folgenden Aussagen korrekt sind und welche nicht.
Hinweis: w= wahr, f=falsch

Sei G eine reguläre Grammatik. Dann gibt es eine CNF-Grammatik G' mit $L(G) = L(G')$.

Sei A eine Sprache. Wir beweisen, dass A kontextfrei ist, in dem wir $\neg$**PUMP-CFL**(A) zeigen.

Sei M ein DFA mit n Zuständen und M' mit n' Zuständen das Ergebnis der Minimierung von M, dann ist $n < n'$.

Um zu beweisen, dass $A \triangleq \{\, a^n x^n \mid x \in \{\, a,\ b \,\} \wedge n \in \mathbb{N} \,\}$ nicht regulär ist, genügt es $\mathrm{L}((aa)^*) \cap \{\, a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}^+ \,\} = A$ zu zeigen.

Sei Σ ein Alphabet. Seien M ein NFA über Σ und e ein regulärer Ausdruck über Σ. Dann gibt es eine Typ-3-Grammatik G mit $L(G) = L(M) \setminus L(e)$.

Für die Klasse der DPDA ist es egal, ob man deren Sprache als L_{End} oder L_{Kel} definiert.

Sei A eine reguläre Sprache. Dann gibt es immer einen DPDA M, der A mit $\mathrm{L}_{\text{Kel}}(M) = A$.

$\mathrm{L}((\varepsilon + c(ab)^*ba)^*\varepsilon(a + c^*)) = \emptyset$

$\mathrm{L}((a + bb)^*(\varepsilon b + c + aa)^*)) = \{\, a^n w^n,\ (bb)^n w^n \mid n \in \mathbb{N} \ \wedge\ w \in \{\, b,\ c,\ aa \,\}^* \,\}$