

Formale Sprachen und Automaten

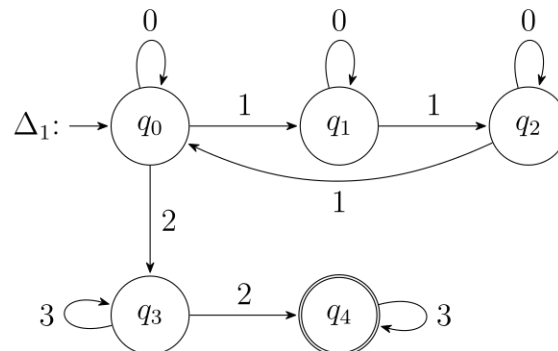
Schriftlicher Test vom 21. Juli 2025

Aufgabe	Punkte	Themenbereich
1	11	Modelle Regulärer Sprachen
2	15	Minimierung eines DFA
3	16	Untermengen-Konstruktion
4	12	Pumping-Lemma
5	18	Modelle Kontextfreier Sprachen
6	15	Induktion
7	15	Myhill-Nerode
8	18	Verständnisfragen

Aufgabe 1: Modelle Regulärer Sprachen

(11 Punkte)

Gegeben seien die Alphabete $\Sigma_1 \hat{=} \{0, 1, 2, 3\}$ und $\Sigma_2 \hat{=} \{a, b\}$, der NFA $M_1 \hat{=} (\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}, \Sigma_1, \Delta_1, \{q_0\}, \{q_4\})$ und die Sprache $A_2 \hat{=} L((a(ab)^*b)^*b)$ mit:

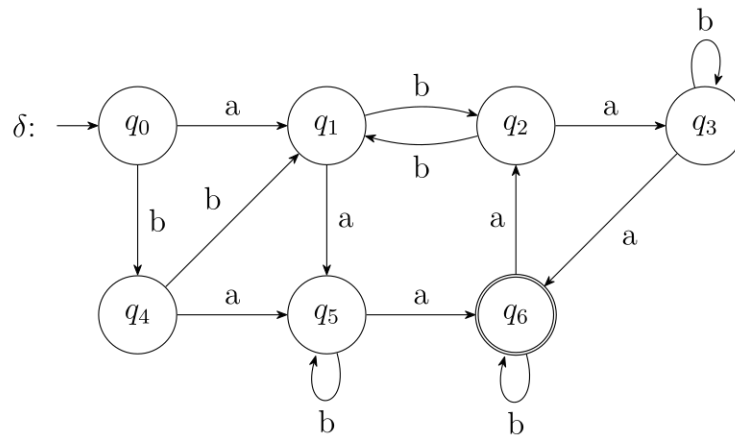


- (5 Punkte) Gib $L(M_1)$ an, ohne auf Automaten oder Grammatiken zu verweisen.
- (6 Punkte) Gib einen DFA M_2 an mit $L(M_2) = A_2$.

Aufgabe 2: Minimierung eines DFA

(15 Punkte)

Gegeben sei der DFA $M \triangleq (\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6\}, \Sigma, \delta, q_0, \{q_6\})$ mit $\Sigma \triangleq \{a, b\}$ mit



- a. (8 Punkte) Gib an: Fülle die folgende Tabelle entsprechend des Table-Filling-Algorithmus zum Minimieren von DFAs mit Kreuzen (x) und Kreisen (o) aus.

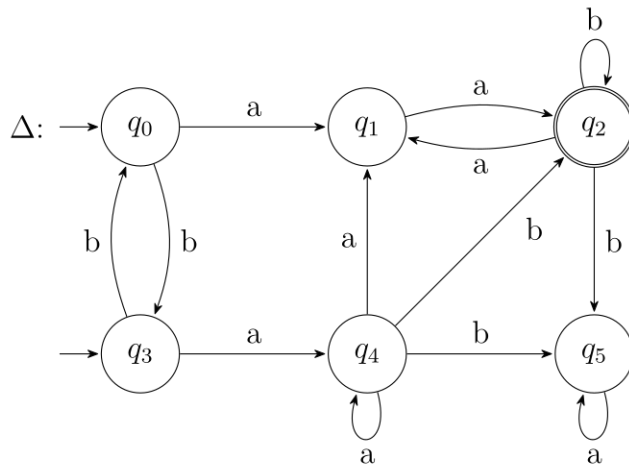
q_1						
q_2						
q_3						
q_4						
q_5						
q_6						
	q_0	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5

- b. (4 Punkte) Die Minimierung unterteilt die Menge der Zustände in Äquivalenzklassen. Gib alle Äquivalenzklassen an, die sich aus der Tabelle ergeben.
- c. (3 Punkte) gib $L(M)$ an, ohne auf Automaten oder Grammatiken zu verweisen.

Aufgabe 3: Untermengen-Konstruktion

(16 Punkte)

Gegeben sei der NFA $M \triangleq (\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5\}, \Sigma, \Delta, \{q_0, q_3\}, \{q_2\})$ mit $\Sigma \triangleq \{a, b\}$ und



- a. (13 Punkte) Konstruiere nur mit Hilfe der Untermengen-Konstruktion den DFA M' zum NFA M . Gib die bei der Untermengen-Konstruktion entstehende Tabelle sowie das Tupel des entstehenden Automaten M' an.
Hinweis: *Es ist nicht nötig, die Übergangsfunktion δ' von M' (graphisch) anzugeben.*
- b. (3 Punkte) Gib $L(M)$ an, ohne auf Automaten oder Grammatiken zu verweisen.

Aufgabe 4: Pumping-Lemma

(12 Punkte)

Gegeben seien das Alphabet $\Sigma \triangleq \{a, b, c\}$ und die Sprache
 $A \triangleq \{c^m a^o c^l b^k c^n \mid k, m, n \in \mathbb{N} \wedge l, o \in \mathbb{N}^+ \wedge o + 3 \leq k\}$.

Beweise mithilfe des Pumping-Lemmas, dass die Sprache A nicht regulär ist.

Aufgabe 5: Modelle Kontextfreier Sprachen

- a. **(15 Punkte)** Gegeben sei das Alphabet $\Sigma \hat{=} \{a, b\}$. Gib einen PDA M an, mit $L_{End}(M) = \emptyset$ und $L_{Kel}(M) = \{wa \mid w \in \Sigma^* \wedge (|w|_a = |w|_b) \wedge (|w|_a \bmod 3 = 0)\}$.
- b. **(3 Punkte)** Beweise: Es gibt keinen DPDA mit $L_{End}(M) = \emptyset$ und $L_{Kel}(M) = \{wa \mid w \in \Sigma^* \wedge (|w|_a = |w|_b) \wedge (|w|_a \bmod 3 = 0)\}$.

Aufgabe 6: Induktion

(15 Punkte)

Gegeben sei das Alphabet $\Sigma \triangleq \{a, b\}$. Wir definieren die Substitution von a nach b auf w als $w[b/a]$ für ein Wort $w \in \Sigma^*$ durch:

- $\epsilon[b/a] = \epsilon$
- $(aw)[b/a] = b(w[b/a])$
- $(bw)[b/a] = b(w[b/a])$

Beispielsweise sind $aba[b/a] = bbb$ und $bbb[b/a] = bbb$.

Beweise per Induktion: $\forall w \in \Sigma^* : |w[b/a]|_b = |w|_a + |w|_b$. Gib das Induktionsschema explizit an.

Hinweis: *Es darf verwendet werden, dass für alle $s, s' \in \Sigma$ und $w \in \Sigma^* : |s'w|_s = |s'|_s + |w|_s$*

Aufgabe 7: Myhill-Nerode**(15 Punkte)**

Gegeben sei das Alphabet $\Sigma \triangleq \{a, b\}$, sowie die über Σ definierte Sprache $A \triangleq \{w \mid |w|_a \neq |w|_b\}$.

- a. **(8 Punkte)** Gib alle Äquivalenzklassen der Myhill-Nerode-Relation bezüglich der Sprache A an.
Hinweis: *Die Namen der Klassen in der Form [...] genügen hier nicht. Es müssen auch die zugehörigen Mengen, also so etwas wie $[...] = \{\dots\}$, angegeben werden.*
- b. **(6 Punkte)** Beweise mithilfe der Äquivalenzklassen, dass A nicht regulär ist.
- c. **(1 Punkt)** Begründe mithilfe der Äquivalenzklassen, warum es keine NFA M mit $L(M) = A$ geben kann.

Aufgabe 8: Verständnisfragen**(18 Punkte)**

- a. **(2 Punkte)** Beweise oder widerlege: Die Sprache $A \triangleq \{a^n b^n x^m \mid n, m \in \mathbb{N}^+ \wedge x \in \{a, b, c\} \wedge |x|_a = n + 2 \wedge n \leq m^2 \wedge 3 \geq m\}$ ist regulär.
- b. **(2 Punkte)** Sei $\Sigma = \{a, b, c\}$ und $G \triangleq (\{S, A, B\}, \Sigma, P, S)$ mit P:

$$S \rightarrow cS \mid aA \mid bB$$

$$A \rightarrow \epsilon \mid aS$$

$$B \rightarrow \epsilon \mid bS$$

Gib den minimalen Typen i aus der Chomsky-Hierarchie für die Sprache $L(G)$ an. Gib außerdem eine Grammatik G' vom Typen i an, mit $L(G') = L(G)$.

Hinweis: *Die Gleichheit muss nicht gezeigt werden. Mit dem minimalen Typ ist derjenige Typ gemeint, der zur kleinsten Menge von Sprachen führt, die von diesem Typ sind, d.h. Typ-3 < Typ-2 < Typ-1 < Typ-0.*

- c. **(1 Punkt)** Begründe: Ist das Wortproblem für kontextfreie Sprachen lösbar? Wenn ja, wie? Wenn nein, warum nicht?
- d. **(1 Punkt)** Begründe: Warum reicht es nicht aus, bei den Terminal- und Nicht-terminalsymbolen Σ und V einer Grammatik $V \cap \Sigma = \emptyset$ zu fordern? Warum muss $V \cap \Sigma^* = \emptyset$ gelten?
- e. **(2 Punkte)** Beweise oder widerlege: Sei M eine beliebige Menge. Dann gibt es *keine* homogene Relation über M die symmetrisch und antisymmetrisch ist.
- f. **(2 Punkte)** Begründe: Warum werden beim Table-Filling Algorithmus am Anfang alle Paare mit je einem nicht-akzeptierendem Zustand und einem akzeptierendem Zustand herausgestrichen?
- g. **(1 Punkt)** Angenommen es gilt $\forall x \in \mathbb{N} : P(x)$ und zu zeigen ist $\forall y \in \mathbb{N} : Q(y)$. Gib einen möglichen ersten Schritt im Beweis an.
- h. **(7 Punkte)** Kreuze an, welche der folgenden Aussagen korrekt sind und welche nicht. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

		Wahr	Falsch
i)	$\{\emptyset\} \notin \mathcal{P}(\emptyset)$	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
ii)	Es gibt unendlich viele Sprachen, die mit ihrer Spiegelsprache übereinstimmen.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
iii)	Wenn A eine Typ-3-Sprache ist und $A \subset B$, dann ist auch B eine Typ-3-Sprache.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
iv)	Wenn es für eine Sprache A eine Grammatik G von Typ-2 mit $L(G) = A$ gibt, dann gibt es keinen DFA M mit $L(M) = A$	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
v)	Die natürliche Induktion ist ein Spezialfall der strukturellen Induktion	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
vi)	Sei A eine reguläre Sprache, dann gibt es immer einen DPDA M mit $L_{Kel}(M) = A$	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
vii)	Für alle DFAs M gilt, dass L_M injektiv ist.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
viii)	Sei A eine beliebige Sprache. Wie beweisen, dass A kontextfrei ist, indem wir zeigen, dass die Myhill-Nerode-Relation zu A einen unendlichen Index hat.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
ix)	Sei w ein Wort über einem Alphabet. Dann sind die Mengen der Präfixe und Suffixe zu diesem Wort gleich groß.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>