2. Klausur
Grundlagen der Elektrotechnik I
14. Januar 2002

Name: ....

Vorname: ....

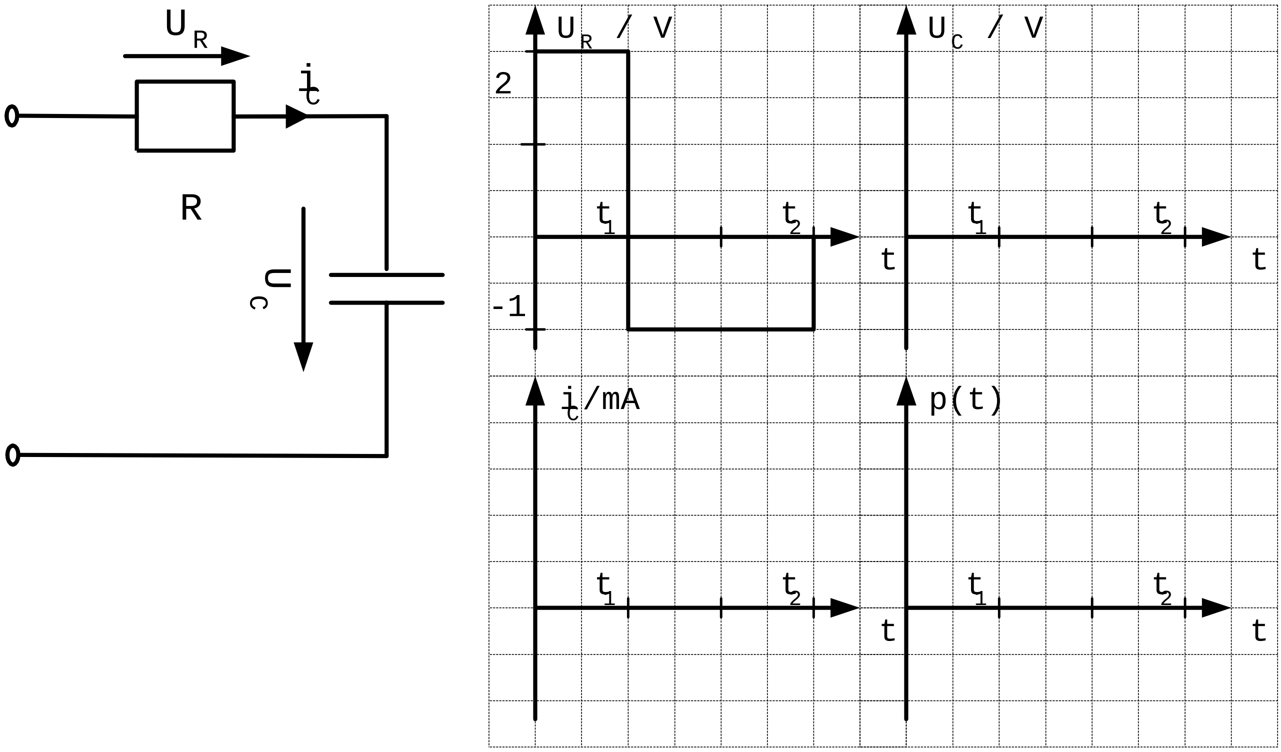
Matr.-Nr.: ....

Bearbeitungszeit: 90 Minuten

- Trennen Sie den Aufgabensatz **nicht** auf.
- Benutzen Sie für die Lösung der Aufgaben **nur** das mit diesem Deckblatt ausgeteilte Papier. **Lösungen, die auf anderem Papier geschrieben werden, können nicht gewertet werden.** Schreiben Sie Ihre Lösung auch auf die Rückseiten der Blätter! Weiteres Papier kann bei den Tutoren angefordert werden.
- Schreiben Sie deutlich! Doppelte, unleserliche oder mehrdeutige Lösungen können nicht gewertet werden.
- Schreiben Sie **nicht** mit Bleistift!
- Schreiben Sie nur in **blau** oder **schwarz!**

1. Aufgabe (5 Punkte): Strom und Spannung am Kondensator

Gegeben sind folgendes Schaltbild und die über dem Widerstand R gemessene Spannung U_R.



$R = 1K\Omega$, $C = 100nF$, $t_1 = 1ms$, $t_2 = 3ms$, $U_C(t = 0) = 0$

1.1. Ladestrom (0,5 Punkte)

Berechnen Sie den Verlauf des Ladestromes i_c und zeichnen Sie ihn in das Diagramm ein!

Lösung:

$$R = \frac{U}{I} \tag{1}$$

$$i_R = \frac{U_R}{R} \tag{2}$$

$$i_{R_1} = \frac{U_{R_1}}{R} = \frac{2V}{1K\Omega} = 2mA, \quad \text{für } 0 \leq t \leq t_1 \tag{3}$$

$$i_{R_2} = \frac{U_{R_2}}{R} = \frac{-1V}{1K\Omega} = -1mA, \quad \text{für } t_1 \leq t \leq t_2 \tag{4}$$

1.2. Kondensatorspannung (3 Punkte)

Berechnen Sie die Kondensatorspannung $U_c(t)$! Zeichnen Sie diese in das Diagramm ein!

Lösung:

$$i_C = C\frac{dU_C}{dt} \tag{5}$$

$$U_C(t) = \frac{1}{C}\int i_c(t)dt + U_{C0} \tag{6}$$

<u>für $0 \leq t \leq t_1$:</u>

$$U_{C1}(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i_{C1}d\tau + U_{C0} \tag{7}$$

$$U_{C0} = U_C(t=0), \tag{8}$$

$$i_{C1} = 2mA = const. \tag{9}$$

$$U_{C1} = \frac{i_{C1}}{C}t + 0 = 2 \cdot 10^4 Vs^{-1} \cdot t + 0V \tag{10}$$

<u>für $t_1 \leq t \leq t_2$:</u>

$$U_{C2}(t) = \frac{1}{C}\int_{t1}^t i_{C2}d\tau + U_{C0} \tag{11}$$

$$U_{C0} = U_C(t=t_1), \tag{12}$$

$$i_{C2} = -1mA = const. \tag{13}$$

$$U_{C2} = \frac{i_{C2}}{C}(t-t_1) + \frac{i_{C1}}{C}t_1 \tag{14}$$

$$= \frac{i_{C2}}{C}t + \frac{i_{C1}}{C}t_1 - \frac{i_{C2}}{C}t_1 \tag{15}$$

$$= \frac{i_{C2}}{C}t + \frac{(i_{C1}-i_{C2})}{C}t_1 \tag{16}$$

$$= -1 \cdot 10^4 Vs^{-1} \cdot t + 30V \tag{17}$$

1.3. Leistung (1 Punkt)

Wie groß ist die mittlere Leistung, die während des Zeitabschnitts $0 \leq t \leq t_2$ am Widerstand R umgesetzt wird?

Lösung:

$$\overline{P} = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)dt \tag{18}$$

$$\overline{P} = \frac{1}{t_2}\left[\int_0^{t_1} p_1(t)dt + \int_{t1}^{t_2} p_2(t)dt\right] \tag{19}$$

$$p_1 = \frac{U_{R1}^2}{R}, p_2 = \frac{U_{R2}^2}{R} \tag{20}$$

$$\overline{P} = \left[\frac{(2V)^2}{1K\Omega}1ms + \frac{(-1V)^2}{1K\Omega}2ms\right]\frac{1}{3}ms \tag{21}$$

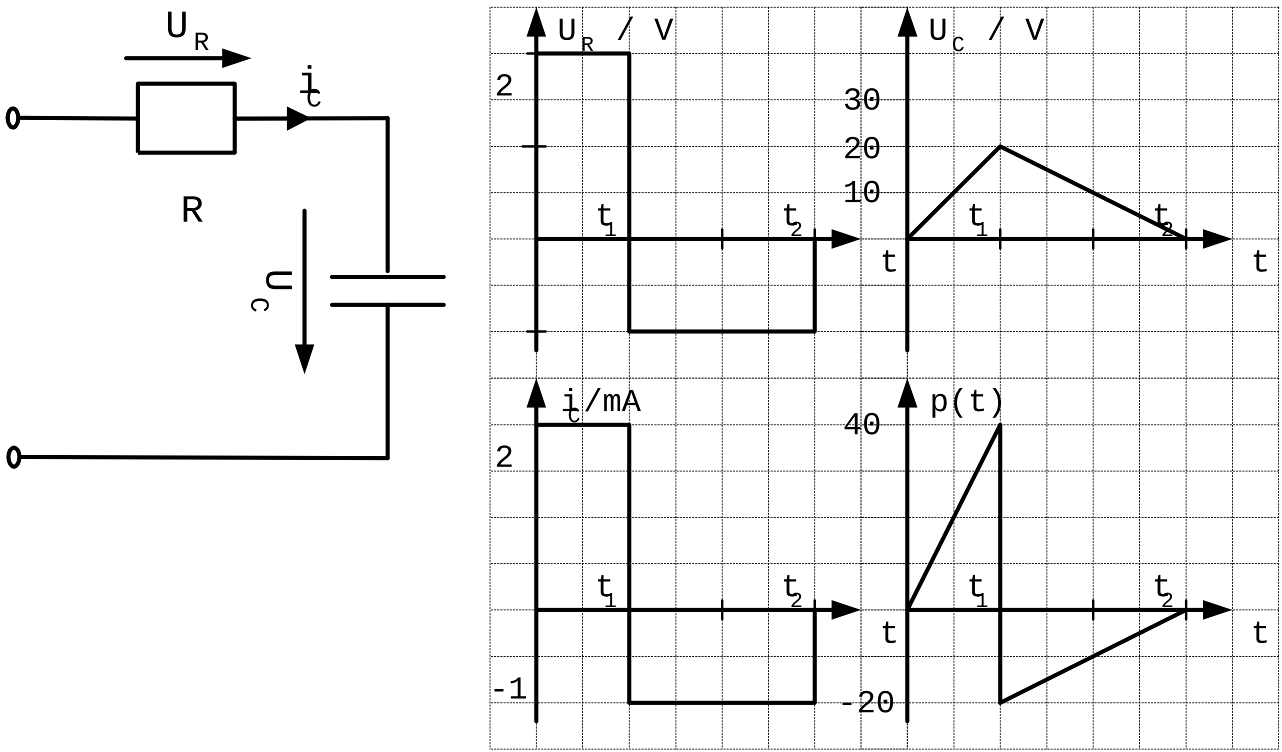
$$\overline{P} = \frac{4}{3}mW + \frac{2}{3}mW = 2mW \tag{22}$$

1.4. (0,5 Punkte)

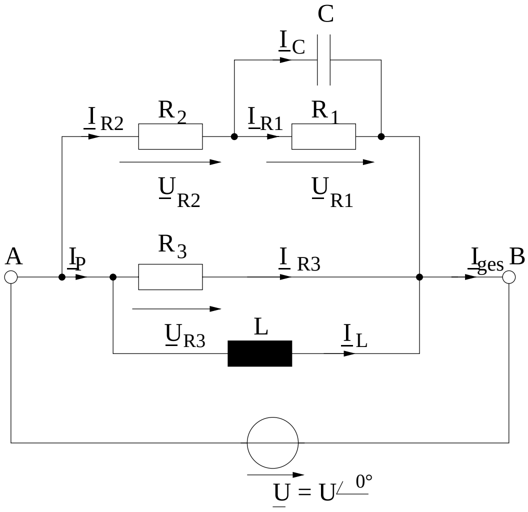
Zeichnen Sie die Augenblicksleistung am Kondensator in das entsprechende Diagramm!

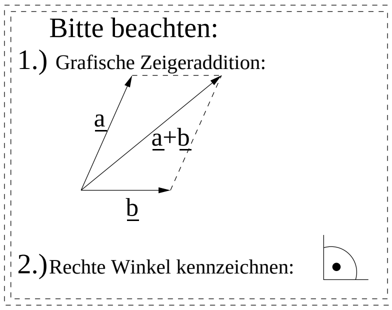
Lösung:

$$
\begin{aligned}
P &= U \cdot I && (23)\\
p_1(t) &= U_{C1}(t) \cdot i_{C1} = 2 \cdot 10^4 V s^{-1} \cdot t \cdot 2mA && (24)\\
&= 40 V A s^{-1} \cdot t && (25)\\
p_2(t) &= U_{C2}(t) \cdot i_{C2} = (-10^4 V s^{-1} \cdot t + 30V) \cdot -1mA && (26)\\
&= 10 V A s^{-1} \cdot t - 3 \cdot 10^{-2} V A && (27)
\end{aligned}
$$



2. Aufgabe (5 Punkte): Gegeben ist das folgende Netzwerk



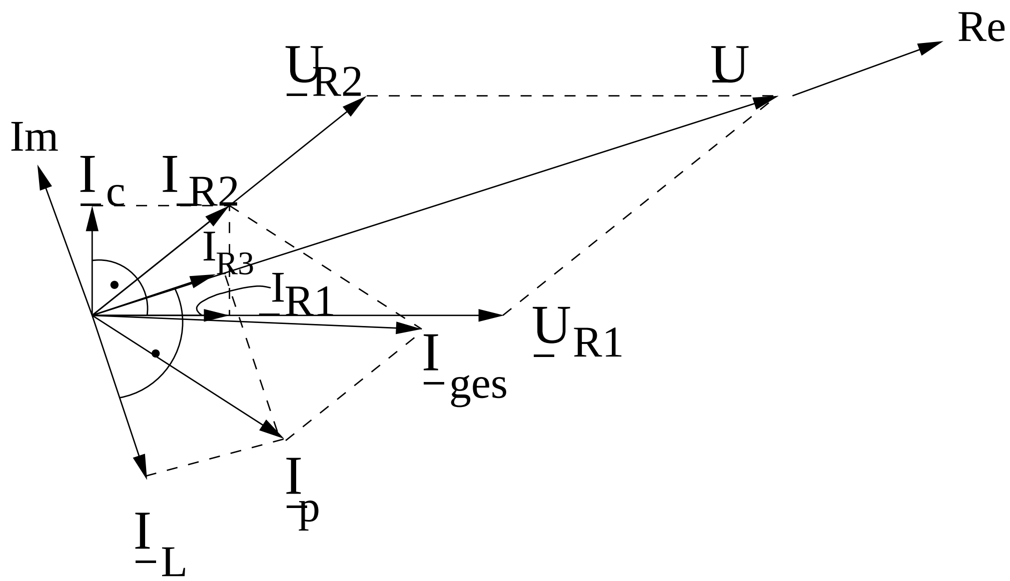


2.1. Qualitatives Zeigerdiagramm (2 Punkte)

Zeichnen Sie das vollständige Zeigerdiagramm (qualitativ) für alle Ströme und Spannungen. Benennen Sie die Zeiger!

<u>Hinweise</u>: Wählen Sie Spannungen betragsmässig grösser als Ströme $(|\underline{U}_x| > |\underline{I}_y|)$ **!!!**
Rechte Winkel sind klar zu kennzeichnen (siehe oben)!!!
Verdeutlichen Sie die grafische Addition von Zeigern wie oben gezeigt !!!

Lösung:



Punktevergabe:
$\underline{I}_p$ *korrekt gezeichnet:* (**0,5 Punkte**)
$\underline{I}_{ges}$ *korrekt gezeichnet:* (**0,5 Punkte**)
$\underline{U}$ *korrekt gezeichnet:* (**0,5 Punkte**)
Re- und Im-Achse korrekt gezeichnet: (**0,5 Punkte**)

2.2. Berechnnung des komplexen Leitwertes (2 Punkte)

Berechnen Sie den komplexen Leitwert in der Form $\underline{Y}_{AB} = Re\{\underline{Y}_{AB}\} + jIm\{\underline{Y}_{AB}\}$ zwischen den Punkten A und B, wobei nun gilt: $\mathbf{R}_3 \mapsto \infty$ **und**
$\mathbf{R}_1 = \mathbf{R}_2 = \mathbf{R}$.

Lösung:

$$\underline{Y}_{AB} = \frac{1}{j\omega L} + \frac{1}{\underline{Z}_{RC}}, mit \qquad (\mathbf{0,5Punkte}\ (auf\ Ansatz\ mit\ \underline{Y}_{AB})) \tag{28}$$

$$\underline{Z}_{RC} = R + \frac{R}{j\omega RC + 1} = \frac{2R + j\omega R^2 C}{1 + j\omega RC} \tag{29}$$

$$\underline{Y}_{AB} = \frac{1}{j\omega L} + \frac{j\omega RC + 1}{j\omega R^2 C + 2R} \qquad (\mathbf{0,5Punkte}\ (\mathbf{auf\ Vereinfachung})) \tag{30}$$

$$\underline{Y}_{AB} = Y_L + \frac{1}{\frac{1}{R + \frac{1}{j\omega C + 1/R}}} \tag{31}$$

$$= Y_L + \frac{j\omega RC + 1}{2R + j\omega R^2 C} \tag{32}$$

$$= Y_L + \frac{j\omega RC + 1}{2R + j\omega R^2 C} \cdot \frac{2R - j\omega R^2 C}{2R - j\omega R^2 C} \qquad (\mathbf{0,5Punkte}\ (\mathbf{auf\ konj.\ kompl.\ Erw.})) \tag{33}$$

$$= -j\frac{1}{\omega L} + j\frac{2\omega R^2 C - \omega R^2 C}{4R^2 + (\omega R^2 C)^2} + \frac{2R + \omega^2 R^3 C^2}{4R^2 + (\omega R^2 C)^2} \tag{34}$$

$$= \frac{2 + \omega^2 R^2 C^2}{4R + \omega^2 R^3 C^2} + j\left(\frac{\omega C}{4 + \omega^2 R^2 C^2} - \frac{1}{\omega L}\right) \qquad (\mathbf{0,5Punkte}) \tag{35}$$

2.3. Phasenwinkel φ (1 Punkt)

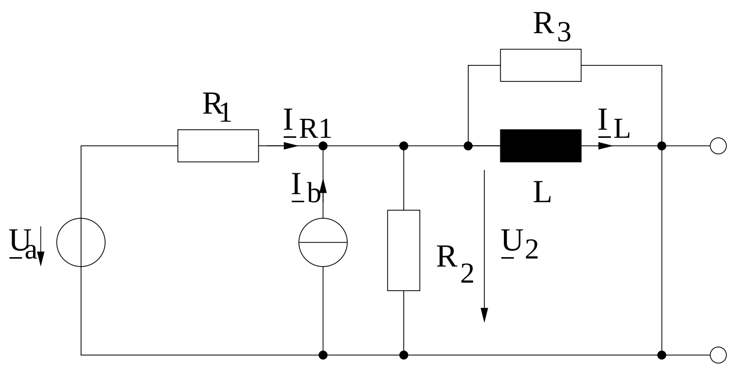
Bestimmen Sie für die Exponentialform $\underline{Y}_{AB} = |\underline{Y}_{AB}| \cdot e^{j\varphi}$ den Phasenwinkel φ.

Lösung:

$$\varphi = arctan\left(\frac{Im\{\underline{Y}_{AB}\}}{Re\{\underline{Y}_{AB}\}}\right) \qquad (\mathbf{0,5Punkte}) \tag{36}$$

$$\varphi = arctan\left(\frac{\frac{\omega C}{4+\omega^2 R^2 C^2} - \frac{1}{\omega L} \cdot (4R + \omega^2 R^3 C^2)}{2 + \omega^2 R^2 C^2}\right) \qquad (\mathbf{0,5Punkte}) \tag{37}$$

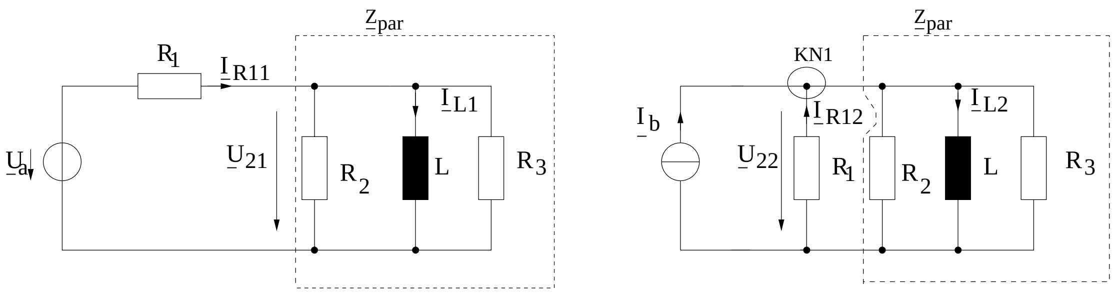
3. Aufgabe (5 Punkte): Superpositionsprinzip: Gegeben ist das folgende Netzwerk



3.1. Teilschaltungen zeichnen (2 Punkte)

Zeichnen Sie die beiden Teilschaltungen, die sich durch die Anwendung des Superpositionsprinzips ergeben, und kennzeichnen Sie die Teilströme durch R_1 und L und die Teilspannung an R_2.

Lösung:



Bauteile in Teilschaltung korrekt gezeichnet: jeweils (**0,5 Punkte**)
Alle Ströme und Spannungen korrekt angetragen: jeweils (**0,5 Punkte**)

3.2. Superpositionsprinzip (0,5 Punkte)

Wie lautet das Superpositionsprinzip für den Strom $\underline{I}_{R1}$?

Lösung:

$$\underline{I}_{R1} = \underline{I}_{R11} + \underline{I}_{R12} \qquad (\mathbf{0,5 Punkte}) \tag{38}$$

Wichtig: Komplexe Grössen. Wenn das Vorzeichen von $\underline{I}_{R12}$ in der Teilschaltung falsch gezeichnet wurde, dies aber in der Superpositionsgleichungs wieder korrigiert wurde, gab es für Aufgabenteil 3.1 und 3.2 zusammen nur 0.5 Punkte Abzug.

3.3. Komplexe Wechselstromrechnung (2,5 Punkte)

Berechnen Sie den Strom $\underline{I}_{R1}$ und geben Sie die Ergebnisse in Polarkoordinaten an. Gegeben sind die folgenden Werte:
$\underline{U}_a = 5V \cdot e^{j45°}$, $\underline{I}_b = 2A \cdot e^{j0°}$,
ω = 1000 1/s, L = 0,5mH, R_1 = 2Ω, R_2 = R_3 = 1 Ω.

<u>Hinweis</u>: Der Rechenweg mit den Transformationen zwischen kathesischen Koordinaten und Polarkoordinaten muss klar erkennbar sein!!!
Rechnen Sie mit drei Nachkommastellen!!!

Lösung:

$$\underline{I}_{R11} = \frac{\underline{U}_a}{\underline{Z}_{ges}}; \qquad \underline{I}_{R11} = \frac{\underline{U}_{21}}{\underline{Z}_{par}} \tag{39}$$

$$\underline{Z}_{ges} = \underline{R_1 + \underbrace{R_2\|R_3\|j\omega L}_{\underline{Z}_{par}}}; \underline{\underline{Z}_{par} = R_2\|R_3\|j\omega L = \frac{j0,5}{1+j}} \qquad (\mathbf{0,5 Punkte}) \tag{40}$$

$$= R_1 + \frac{j\omega L R_2 R_3}{R_2 R_3 + j\omega L(R_2 + R_3)} \tag{41}$$

$$= 2\Omega + \frac{j0,5}{1+j}\Omega \tag{42}$$

$$= \frac{2+j2,5}{1+j}\Omega = \frac{3,202 \cdot e^{j51,34^\circ}}{1,414 \cdot e^{j45^\circ}}\Omega = 2,264 \cdot e^{j6,34^\circ}\Omega \tag{43}$$

$$\underline{I}_{R11} = \frac{5V \cdot e^{j45^\circ}}{2,264A \cdot e^{j6,34^\circ}} = \underline{2,208 \cdot e^{j38,66^\circ}} \qquad (\mathbf{0,5 Punkte}) \tag{44}$$

$$KN1 := \underline{I}_b + \underline{I}_{R12} - \frac{\underline{U}_{22}}{R_2\|R_3\|X_L} = 0 \tag{45}$$

$$\underline{U}_{22} = -\underline{I}_{R12} \cdot R_1 \qquad (\mathbf{0,5 Punkte}) \tag{46}$$

$$\Rightarrow \underline{I}_b + \underline{I}_{R12}\left(1 + \frac{R_1}{Z_{par}}\right) = 0, mit \underline{Z}_{par} = \frac{2(1+j)}{j0,5} \tag{47}$$

$$\Rightarrow \underline{I}_{R12} = -\frac{\underline{I}_b}{1 + \frac{2(1+j)}{j0,5}} = \frac{(-2-j0)A}{\frac{2+j2,5}{j0,5}} \tag{48}$$

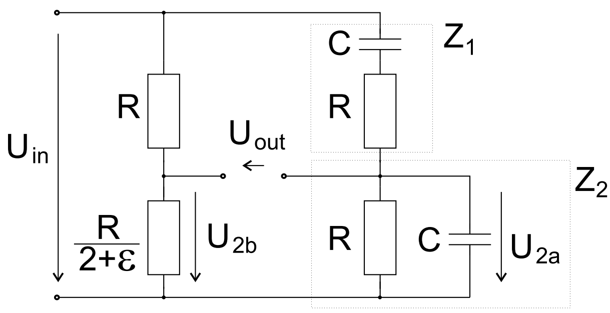
$$= \frac{-jA}{2+j2,5} = \frac{1A \cdot e^{-j90^\circ}}{3,202A \cdot e^{j51,34^\circ}} = \underline{0,312 \cdot e^{-j141,34^\circ}} \qquad (\mathbf{0,5 Punkte}) \tag{49}$$

$$\underline{I}_{R1} = \underline{I}_{R11} + \underline{I}_{R12} \tag{50}$$

$$= (1,724 + j1,379)A + (-0,244 - j0,195)A \tag{51}$$

$$= \underline{(1,48 + j1,184)A} = \underline{1,895A \cdot e^{j38,66^\circ}} \qquad (\mathbf{0,5 Punkte}) \tag{52}$$

4. Aufgabe (5 Punkte): Wien-Robinson-Brücke



4.1. Komplexe Widerstände (1 Punkt)

Gegeben ist die Schaltung in Bild 1. Berechnen Sie die komplexen Widerstände $\underline{Z}_1$ und $\underline{Z}_2$.

Lösung:

$$Z_1 = R + \frac{1}{j\omega C} \qquad (\mathbf{0,5 Punkte}) \tag{53}$$

$$Z_2 = \frac{1}{\frac{1}{R} + j\omega C} = \frac{R}{1 + j\omega RC} \qquad (\mathbf{0,5 Punkte}) \tag{54}$$

4.2. Komplexer Spannungsteiler (1.5 Punkte)

Wie groß ist das Verhältnis $\frac{U_{2a}}{U_{in}}$ in der Form $\frac{1}{a+jb}$?

Lösung:

$$\frac{\underline{U}_{2a}}{\underline{U}_{in}} = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} = \frac{R}{1 + j\omega RC} \cdot \frac{1}{\frac{R}{1+j\omega RC} + R + \frac{1}{j\omega C}} \tag{55}$$

$$\frac{1}{a + jb} = \frac{1}{R + R + j\omega R^2 C + \frac{1}{j\omega C} + R} \tag{56}$$

$$= \frac{1}{3 + j(\omega RC - \frac{1}{\omega RC})} \tag{57}$$

4.3. Brückenschaltung (1.5 Punkte)

Berechnen Sie das Verhältnis $\frac{U_{out}}{U_{in}}$ in der Form $\frac{1}{a+jb} - \frac{1}{c}$.

Lösung:

$$\frac{\underline{U}_{out}}{\underline{U}_{in}} = \frac{\underline{U}_{2a} - \underline{U}_{2b}}{\underline{U}_{in}} \tag{58}$$

$$= \frac{1}{3 + j(\omega RC - \frac{1}{\omega RC})} - \frac{R}{2+\varepsilon} \cdot \frac{R}{R + \frac{R}{2+\varepsilon}} \tag{59}$$

$$\frac{1}{a + jb} - \frac{1}{c} = \frac{1}{3 + j(\omega RC - \frac{1}{\omega RC})} - \frac{1}{3+\varepsilon} \tag{60}$$

4.4. Übertragungsverhalten (1 Punkt)

In einer Wien-Brücke beträgt bei $\varepsilon = 0$ das Übertragungsverhältnis:

$$\frac{U_{out}}{U_{in}} = \frac{\omega^2 R^2 C^2 - 1}{-3\omega^2 R^2 C^2 + 9j\omega RC + 3}$$

Bei welcher Frequenz ω ist das Übertragungsverhältnis $\frac{U_{out}}{U_{in}}$ genau Null, und welche Werte nimmt es für $\omega = 0$ und $\omega \to \infty$ an?

Lösung:

$$\frac{U_{out}}{U_{in}} \quad \text{ist eine Funktion von} \quad \omega \quad \text{und wird zu Null wenn} \tag{61}$$

$$\omega^2 R^2 C^2 = 1 \rightarrow \qquad \omega = \frac{1}{RC} \tag{62}$$

$$\lim_{\omega \to 0} \frac{U_{out}}{U_{in}} = -\frac{1}{3} \tag{63}$$

$$\lim_{\omega \to \infty} \frac{U_{out}}{U_{in}} = \frac{R^2 C^2 - \frac{1}{\omega^2}}{-3R^2 C^2 + 9j\frac{RC}{\omega} + \frac{3}{\omega^2}} = -\frac{1}{3} \tag{64}$$