„Grundlagen der Mess- und Regelungstechnik“
Prüfung Wintersemester 2016/17
Teil 1: Theorieteil

9 LP

8. März 2017

Zeitraum: 11:00 - 11:50 Uhr

erlaubte Hilfsmittel: keine

Name, Vorname: ______________________

Matr. Nr: ______________________

Studiengang: ______________________

Abschluss: ○Bachelor ○Master ○Diplom

GMRT-Übungsschein im Wintersemester 20___/___ erhalten.

	max. Punktzahl	erreichte Punktzahl
Σ Theorieteil	21	

Begründen/Erläutern Sie Ihre Antworten mit wenigen Worten.

a) (*2 Punkte*) Zeichnen Sie das Bild des Standardregelkreises mit Störungen und stationärer Vorsteuerung. Achten Sie auf die genaue Verwendung von Blockschaltbildsymbolen.

b) (*1 Punkt*) Welche Aufgaben haben Sie bei der Auslegung einer dynamischen Vorsteuerung?

c) (*2 Punkte*) Beschreiben Sie mit wenigen Worten, wie man schnell einen PI-Regler auslegen kann.

d) (*1 Punkt*) Aus welchen mathematischen Funktionen setzen sich im Allgemeinen Sprungantworten zusammen?

e) (*1 Punkt*) Was versteht man unter dem „eingeschwungenen Zustand“ eines Systems?

f) (*1 Punkt*) Warum kann man ohne weitere Rechnung für das System

$$G(s) = \frac{(s-1)(s+2)}{s^5 + 2s^4 + 3s^2 + s + 1}$$

eine Stabilitätsaussage treffen?

g) (*1 Punkt*) Wie kann einfach die bleibende Regelabweichung bestimmt werden?

h) (*1 Punkt*) Was zeichnet ein lineares System aus?

i) (*1 Punkt*) Nennen Sie zwei Gründe, warum ein sprungförmiges Testsignal wichtig in der Regelungstechnik ist.

j) (*2 Punkt*) Skizzieren Sie qualitativ die Ortskurve eines Totzeitgliedes und eines PT_1T_0-Systems.

k) (*1 Punkt*) Was muss gegeben sein, damit man alle Pole eines Systems mit einem geeigneten Regler unabhängig voneinander verschieben kann?

l) (*1 Punkt*) Was zeichnet ein indirektes Messverfahren nach dem Kompensationsprinzip aus? (Es muss keine Skizze gezeichnet werden)

m) (*1 Punkt*) Nennen Sie zwei Vorteile des Differenzprinzips.

n) (*1 Punkt*) Als Stellglied steht Ihnen nur ein schaltender Aktuator zur Verfügung. Wie kann man mit diesem eine analoge Ausgangsgröße des Reglers umsetzen?

o) (*2 Punkte*) Erläutern Sie anhand eines Bildes die Vierleitertechnik.

p) (*1 Punkt*) Was versteht man in der Messtechnik unter Einflussgrößen?

q) (*1 Punkt*) Vier Thermoelemente werden wie in Abb. 1 gezeigt verschaltet. Wie groß ist die gemessene Spannung U_{th}?

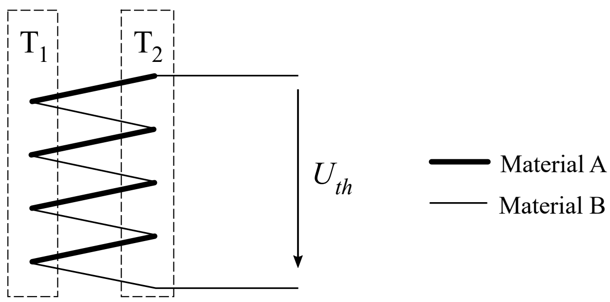

Abbildung 1: Thermoelement.

Technische Universität Berlin, Fachgebiet Mess- und Regelungstechnik

„Grundlagen der Mess- und Regelungstechnik“
Prüfung Wintersemester 2016/17
Teil 2: Rechenteil

9 LP

8. März 2017

Zeitraum: 12:00 - 14:00 Uhr

erlaubte Hilfsmittel: Taschenrechner, zwei beschriebene Blätter

Name, Vorname: ______________________________

Matr. Nr: ______________________________

Studiengang: ______________________________

Abschluss: ○Bachelor ○Master ○Diplom

GMRT-Übungsschein im Wintersemester 20___/___ erhalten.

	max. Punktzahl	erreichte Punktzahl
Σ Theorieteil	21	
Aufgabe 1	7.5	
Aufgabe 2	6.5	
Aufgabe 3	5	
Aufgabe 4	8.5	
Aufgabe 5	5	
Σ Rechnen+Theorie	53.5	

Note:

1. Aufgabe: Modellbildung (7.5 Punkte)

Es sei ein kontinuierlich betriebener, ideal durchmischter Reaktor gegeben. Sowohl die Temperatur T [K] als auch das Füllvolumen V [L] im Reaktor können als konstant angenommen werden. Im Reaktor laufen folgende Reaktionen ab:

$$A \xrightarrow{r_1} B \xrightarrow{r_2} C \tag{1}$$
$$2A \xrightarrow{r_3} D \quad . \tag{2}$$

Dabei gelten folgende Reaktionsraten r_j [mol/(Ls)]:

$$r_1 = k_1 c_\mathrm{A} \quad , \quad r_2 = k_2 c_\mathrm{B} \quad , \quad r_3 = k_3 {c_\mathrm{A}}^2 \quad . \tag{3}$$

Bei Stoff A handelt es sich um das Edukt, welches mit der konstanten Eingangskonzentration $c_\mathrm{A,ein}$ [mol/L] mit dem volumenspezifischen Zufluss $u = \dot{V}/V$, mit $\dot{V}$ in [L/s], zugeführt wird. Die Stellgröße des Systems ist u [1/s].
Stoff B ist das gewünschte Produkt. Die Stoffe C und D entstehen aus unerwünschten Nebenreaktionen und stellen Abfallprodukte dar.

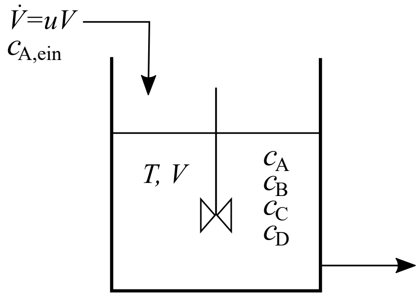

Abbildung 2: Ideal durchmischter, kontinuierlicher Reaktor.

a) (*2 Punkte*) Führen Sie für die Stoffe A und B eine Komponentenbilanz durch und leiten Sie die beiden Differentialgleichungen der Form $\dot{c}_\mathrm{A}(t) = ...$ und $\dot{c}_\mathrm{B}(t) = ...$ her, welche das dynamische Verhalten des Reaktors beschreiben. Die Stoffe C und D müssen nicht bilanziert werden.

Quereinstieg: Rechnen Sie ab b) unbedingt mit folgenden Gleichungen weiter:

$$\dot{c}_\mathrm{A}(t) = u(t)(\gamma_\mathrm{A1} - c_\mathrm{A}(t)) + \gamma_\mathrm{A2}\, c_\mathrm{A}(t) + \gamma_\mathrm{A3}\, c_\mathrm{A}(t)^2 \tag{4}$$
$$\dot{c}_\mathrm{B}(t) = -u(t)\, c_\mathrm{B}(t) + \gamma_\mathrm{B1}\, c_\mathrm{B}(t) + \gamma_\mathrm{B2}\, c_\mathrm{B}(t) \quad , \tag{5}$$

wobei γ_{Ai} und γ_{Bi} konstante Parameter des Systems sind.

b) (*1.5 Punkte*) Linearisieren Sie das Differentialgleichungssystem um den allgemeinen stationären Arbeitspunkt ($c_\mathrm{As},\ c_\mathrm{Bs},\ u_\mathrm{s}$).

c) (*1.5 Punkte*) Führen Sie eine Laplace-Transformation für das linearisierte System durch. Welches Übertragungsverhalten erkennen Sie von u nach c_A? Geben Sie etwaige Zeitkonstanten und den dazugehörigen Verstärkungsfaktor der entsprechenden Übertragungsfunktion an.

Quereinstieg: Rechnen Sie für d) unbedingt mit folgenden Gleichungen im Bildbereich weiter. Alle Konstanten seien reelle Zahlen.

$$C_{\mathrm{A}}(s) = \frac{K_{\mathrm{A}}s}{T_{\mathrm{A}}s+1}U(s) \tag{6}$$

$$C_{\mathrm{B}}(s) = \frac{K_{\mathrm{B}}}{T_{\mathrm{B}}s^2+s}C_A(s) + \frac{K_{\mathrm{C}}}{T_{\mathrm{B}}s+1}U(s) \tag{7}$$

d) (*2.5 Punkte*) Leiten Sie die Übertragungsfunktion $G_{\mathrm{B}}(s) = \frac{C_{\mathrm{B}}(s)}{U(s)}$ her. Erläutern Sie, inwiefern diese Übertragungsfunktion schwingungsfähig ist. Erläutern Sie weiterhin, ob die Übertragungsfunktion minimalphasig ist. Dabei soll gelten, dass $K_{\mathrm{B}}K_{\mathrm{A}} + K_{\mathrm{C}} < 0$ und $K_{\mathrm{C}}T_{\mathrm{A}} > 0$ ist.

1. Aufgabe Musterlösung

a) Mit $u = \frac{\dot{V}}{V}$:

$$\dot{c}_\mathrm{A} = u \cdot (c_\mathrm{A,ein} - c_\mathrm{A}) - k_1 c_\mathrm{A} - 2k_3 c_\mathrm{A}^2 \qquad [\textbf{1.0 Pkt}] \tag{8}$$
$$\dot{c}_\mathrm{B} = -u \cdot (c_\mathrm{B}) + k_1 c_\mathrm{A} - k_2 c_\mathrm{B} \qquad [\textbf{1.0 Pkt}] \tag{9}$$

b) Quereinstieg ist:

$$\dot{c}_\mathrm{A}(t) = u(\gamma_\mathrm{A1} - c_\mathrm{A}) + \gamma_\mathrm{A2} c_\mathrm{A} + \gamma_\mathrm{A3} c_\mathrm{A}^2 \tag{10}$$
$$\dot{c}_\mathrm{B}(t) = -u \cdot c_\mathrm{B} + \gamma_\mathrm{B1} c_\mathrm{A} + \gamma_\mathrm{B2} c_\mathrm{B} \quad , \tag{11}$$

Linearisierung um einen stationären Arbeitspunkt mit $\Delta c_i = c_i - c_{is}$ und $\Delta u_i = u - u_\mathrm{s}$ liefert [**0.5 Pkt**]:

$$\Delta\dot{c}_\mathrm{A} = (-u_\mathrm{s} + \gamma_\mathrm{A2} + 2\gamma_\mathrm{A3} c_\mathrm{As}) \cdot \Delta c_\mathrm{A} + 0 \cdot \Delta c_\mathrm{B} + (\gamma_\mathrm{A1} - c_\mathrm{As}) \cdot \Delta u \qquad [\textbf{0.5 Pkt}] \tag{12}$$
$$\Delta\dot{c}_\mathrm{B} = \gamma_\mathrm{B1} \Delta c_\mathrm{A} + (-u_\mathrm{s} + \gamma_\mathrm{B2}) \cdot \Delta c_\mathrm{B} + (-c_\mathrm{Bs}) \cdot \Delta u \qquad [\textbf{0.5 Pkt}] \tag{13}$$

c) Laplace-Transformation des DGL-Systems:

$$C_\mathrm{A}(s) = \underbrace{\frac{K_\mathrm{A}}{T_\mathrm{A} s + 1}}_{G_\mathrm{A}} \cdot U(s) \qquad [\textbf{0.5 Pkt}] \tag{14}$$
$$s \cdot C_\mathrm{B}(s) = k_1 \cdot C_\mathrm{A}(s) - (u_\mathrm{s} + k_2) \cdot C_\mathrm{B}(s) + (-c_\mathrm{Bs}) \cdot U(s) \tag{15}$$
$$C_\mathrm{B}(s) = \frac{k_1 \cdot C_\mathrm{A}(s) \cdot T_\mathrm{B}}{T_\mathrm{B} s + 1} + \frac{-c_\mathrm{Bs} \cdot T_\mathrm{B}}{T_\mathrm{B} s + 1} \cdot U(s) \qquad [\textbf{0.5 Pkt}] \tag{16}$$

G_A entspricht einem PT_1-Glied mit:

$$T_\mathrm{A} = \frac{1}{u_\mathrm{s} + k_1 + 4k_3 c_\mathrm{As}}, \quad K_\mathrm{A} = (c_\mathrm{A,ein} - c_\mathrm{As}) \cdot T_\mathrm{A} \quad . \qquad [\textbf{0.5 Pkt}] \tag{17}$$

Außerdem ist:

$$T_\mathrm{B} = \frac{1}{u_\mathrm{s} + k_2}, \quad K_\mathrm{B} = -c_\mathrm{Bs} \cdot T_\mathrm{B} \quad . \tag{18}$$

d) Quereinstieg ist:

$$C_\mathrm{A}(s) = \frac{K_\mathrm{A} s}{T_\mathrm{A} s + 1} U(s) \tag{19}$$
$$C_\mathrm{B}(s) = \frac{K_\mathrm{B}}{T_\mathrm{B} s^2 + s} C_A(s) + \frac{K_\mathrm{C}}{T_\mathrm{B} s + 1} U(s) \tag{20}$$

Einsetzen von Gl. 19 in 20:

$$C_\mathrm{B}(s) = \left(\frac{K_\mathrm{B} K_\mathrm{A}}{(T_\mathrm{B} s + 1)(T_\mathrm{A} s + 1)} + \frac{K_\mathrm{C}}{T_\mathrm{B} s + 1} \right) \cdot U(s) \qquad [\textbf{0.5 Pkt}] \tag{21}$$
$$C_\mathrm{B}(s) = \underbrace{\left(\frac{K_\mathrm{C} \cdot T_\mathrm{A} s + K_\mathrm{B} K_\mathrm{A} + K_\mathrm{C}}{(T_\mathrm{B} s + 1)(T_\mathrm{A} s + 1)} \right)}_{G_\mathrm{B}} \cdot U(s) \qquad [\textbf{0.5 Pkt}] \tag{22}$$

Es handelt sich um ein PD-Glied in Reihe geschaltet mit zwei PT_1 Gliedern. Sowohl ein PD-Glied, als auch zwei in Reihe geschaltete PT_1 Glieder können nicht schwingen. Somit ist das Gesamtsystem nicht schwingungsfähig [**0.5 Pkt**].
Aufgrund von $K_\mathrm{B} K_\mathrm{A} + K_\mathrm{C} < 0$ weist das System eine positive Nullstelle auf [**0.5 Pkt**] und ist somit nicht minimalphasig, sondern hat einen Allpassanteil [**0.5 Pkt**]. Es ist somit mit einer erhöhten Phasenverschiebung zu rechnen ($|270°|$).

2. Aufgabe: Zustandsraummodell (6.5 Punkte)

Gegeben sei der folgende Versuchsaufbau:

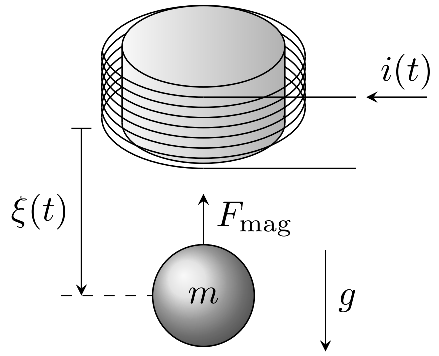

Abbildung 3: Schwebende Magnetkugel.

Eine ferromagnetische Kugel der Masse $m\,[\text{kg}]$ befindet sich im Schwerefeld der Erde, welches durch die Erdbeschleunigung $g\,[\text{m/s}^2]$ beschrieben sei. Ein Elektromagnet wird verwendet, um diese Kugel anzuheben. Weiterhin wird durch einen Sensor der Abstand zwischen der Kugel und dem Elektromagneten $\xi(t)\,[\text{m}]$ gemessen. Der Elektromagnet wird mit dem elektrischen Strom $i(t)\,[\text{A}]$ angesteuert, wodurch die Kraft $F_{\text{mag}}(t)\,[\text{N}]$ auf die Kugel wirkt. Diese Kraft lässt sich wie folgt aus $\xi(t)$ und $i(t)$ berechnen

$$F_{\text{mag}}(t) = \left| \frac{\alpha}{\beta + \xi(t)^2}\, i(t) \right| \quad ,$$

wobei $\alpha = 1\,[\text{Nm}^2/\text{A}]$ und $\beta = 1\,[\text{m}^2]$ ist. Das System wird als reibungsfrei angenommen. Die Anfangsbedingungen sind gegeben durch $\xi(0) = \xi_0$ und $i(0) = i_0$

a) (*1 Punkt*) Bestimmen Sie die die Differentialgleichung, welche die Bewegung der Kugel beschreibt.

b) (*1.5 Punkte*) Linearisieren Sie die erhaltene Differentialgleichung um folgenden Arbeitspunkt: $i_s = 1\,\text{A}$, $\xi_s = 1\,\text{m}$. Führen sie dafür folgende Größen ein: $h(t) = \xi(t) - \xi_s$ und $u(t) = i(t) - i_s$.

   Hinweis: Denken Sie daran, auch die Anfangsbedingungen für das linearisierte System anzugeben. Weiterhin gilt: $\frac{d|x|}{dx} = \text{sign}(x)$.

c) (*1.5 Punkte*) Erstellen Sie ein Zustandsraummodell der Differentialgleichung aus Aufgabenteil b). Geben Sie dafür die Variablen $\mathbf{A}$, $\underline{b}$, $\underline{c}^T$ des zugehörigen Zustandsraummodells an, welches entsprechend folgender Nomenklatur definiert ist

$$\begin{aligned} \dot{\underline{x}}(t) &= \mathbf{A}\,\underline{x}(t) + \underline{b}\,u(t) \quad , \\ y(t) &= \underline{c}^T\,\underline{x}(t) \quad , \end{aligned}$$

   wobei

$$\underline{x}(t) = \begin{bmatrix} h(t) \\ \dot{h}(t) \end{bmatrix} \quad .$$

Quereinstieg: Rechnen Sie für alle folgenden Aufgabenteile unbedingt mit diesem Zustandsraummodell weiter:

$$\dot{\underline{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \underline{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \ ,$$
$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^T \underline{x}(t) \ .$$

d) (*1 Punkt*) Überprüfen Sie sowohl, ob das gegebene System steuerbar und ob es beobachtbar ist.

e) (*1.5 Punkte*) Entwerfen sie für das System aus Aufgabenteil d) einen Zustandsregler, sodass die Pole des geschlossenen Regelkreises auf $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = -2$ gelegt werden.

Musterlösung

a) (*1 Punkt*)
Kräftegleichgewicht:

$$m\ddot{\xi} - mg = -F_{\text{mag}} \tag{23}$$
$$m\ddot{\xi} - mg = -\left|\frac{\alpha}{\beta+\xi^2}\cdot i\right| \tag{24}$$

b) (*1.5 Punkte*)

$$f = m\ddot{\xi} - mg + \left|\frac{\alpha}{\beta+\xi^2}\cdot i\right| = 0 \tag{25}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \ddot{\xi}} = m \ , \qquad \frac{\partial f}{\partial \xi} = \operatorname{sign}\left(\frac{\alpha}{\beta+\xi^2}\cdot i\right)\cdot\left(\frac{2\alpha\xi}{(\beta+\xi^2)^2}\cdot i\right) \ , \tag{26}$$
$$\frac{\partial f}{\partial i} = \operatorname{sign}\left(\frac{\alpha}{\beta+\xi^2}\cdot i\right)\cdot\frac{\alpha}{\beta+\xi^2} \ . \tag{27}$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \ddot{\xi}}\right|_{\xi_s,i_s} = m \ , \qquad \left.\frac{\partial f}{\partial \xi}\right|_{\xi_s,i_s} = \operatorname{sign}\left(\frac{1}{1+1^2}\cdot 1\right)\cdot\left(-\frac{2\cdot 1}{(1+1^2)^2}\cdot 1\right) = -0.5 \ , \tag{28}$$
$$\left.\frac{\partial f}{\partial i}\right|_{\xi_s,i_s} = \operatorname{sign}\left(\frac{1}{1+1^2}\cdot 1\right)\cdot\frac{1}{1+1^2} = 0.5 \ . \tag{29}$$

$$m\ddot{y} - 0.5y = -0.5u \ , \qquad \text{mit} \quad y(0) = \xi_0 - \xi_s \quad \text{und} \quad u(0) = i_0 - i_s \tag{30}$$

c) (*1.5 Punkte*)

$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ {}^{0.5}/_{m} & 0 \end{bmatrix}\underline{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ {}^{-0.5}/_{m} \end{bmatrix} u \tag{31}$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\underline{x} \tag{32}$$

d) (*1 Punkt*)

$$\operatorname{rank}\left(\begin{bmatrix}\underline{b} & \mathbf{A}\underline{b}\end{bmatrix}\right) = \operatorname{rank}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 2 \tag{33}$$

Das System ist steuerbar.

$$\operatorname{rank}\left(\begin{bmatrix}\underline{c}^T \\ \underline{c}^T\mathbf{A}\end{bmatrix}\right) = \operatorname{rank}\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right) = 1 \tag{34}$$

Das System ist nicht beobachtbar.

e) (*1.5 Punkte*)
Der Zustandsregler wird definiert als $\underline{k}^T = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix}$. Daraus folgt

$$\det\left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right)\right) = \det\left(\begin{bmatrix} \lambda + k_1 & -1 + k_2 \\ -1 & \lambda \end{bmatrix}\right) = \tag{35}$$
$$\lambda(\lambda + k_1) - 1 + k_2 \overset{!}{=} 0 \ . \tag{36}$$

Für $\lambda = -1$ und $\lambda = -2$ ergibt sich somit folgendes Gleichungssystem

$$k_1 - k_2 = 0 \quad \rightarrow \quad k_1 = k_2 \ , \tag{37}$$
$$-2k_1 + k_2 = -3 \quad \rightarrow \quad k_1 = k_2 = 3 \ . \tag{38}$$

3. Aufgabe: Wurzelortskurve (5 Punkte)

Gegeben ist die Strecke:

$$G_S(s) = \frac{1}{(0.2s+1)(s-1)}\,, \tag{39}$$

die zunächst mit einem P-Regler,

$$G_R(s) = K_P \tag{40}$$

geregelt werden soll.

a) (*1.5 Punkte*) Zeichnen Sie die zugehörige Wurzelortskurve und geben Sie den Wurzelschwerpunkt sowie die Winkel der Asymptoten an.

b) (*1.5 Punkte*) Geben Sie den Wertebereich der Reglerverstärkung K_P an, in dem alle Pole des geschlossenen Regelkreises einen Realteil kleiner als -1 haben und maximal 5-prozentiges Überschwingen möglich ist.

c) (*2 Punkte*) Welches andere Regelziel kann nicht von einem P-Regler erreicht werden? Legen Sie einen Regler aus, der dieses Regelziel erreicht. Die Regelziele aus b) müssen nicht mehr berücksichtigt werden.

3. Aufgabe: Musterlösung (5 Punkte)

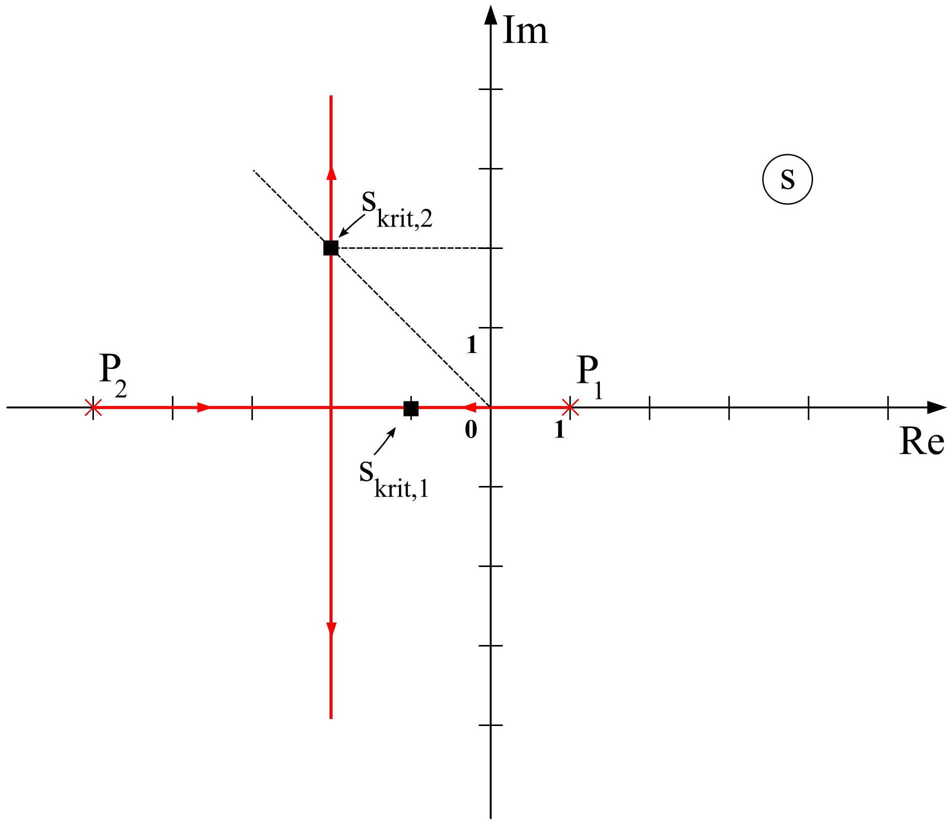

Abbildung 4: WOK Musterlösung.

a) $\sigma_w = -2$ (**0.25 Pkt**) ; $\varphi_0 = \pi/2$; $\varphi_1 = 3\pi/2$ (**0.25 Pkt**)
Bild: Form (**0.25 Pkt**) ; Pole (**0.25 Pkt**) ; WOK (**0.5 Pkt**)

b) Realteil kleiner als -1:
$s_{krit1} = -1$, $K_{krit1} = 8$ (**0.25 Pkt**), $K_{P,krit1} = K_{krit1}/5 = 1.6$ (**0.25 Pkt**)
maximal 5-prozentiges Überschwingen:
$s_{krit2} = -2 + 2i$, $K_{krit2} = 13$ (**0.25 Pkt**), $K_{P,krit2} = 2.6$ (**0.25 Pkt**)
K_P muss im Bereich $1.6 < Kp \leq 2.6$ liegen. (**0.5 Pkt**)

c) Der P-Regler schafft es nicht, eine bleibende Regelabweichung bzgl. einer konstanten Führungsgröße zu verhindern (**0.5 Pkt**). Ein Regler, der dies schafft, ist z.B. der PI-Regler

$$G_R = \frac{1+s}{s} \quad (\mathbf{1.5\ Pkt}) \quad .$$

3. Aufgabe: Direkte Vorgabe (5 Punkte)

Gegeben ist das folgende Blockschaltbild.

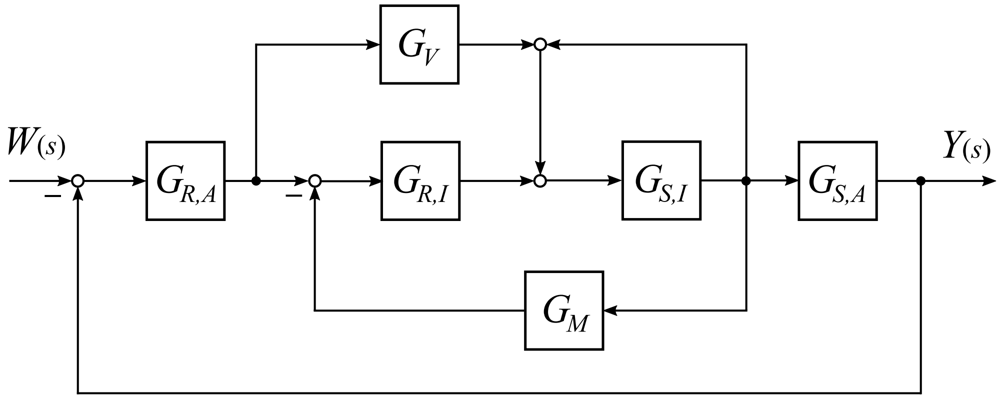

Abbildung 5: Blockschaltbild.

a) (*2 Punkte*) Formen Sie das Blockschaltbild aus Abb. 5 zunächst so um, dass alle Rückführungszweige keine Übertragungsfunktion mehr enthalten. Bringen Sie das Blockschaltbild anschließend in die Form aus Abb. 6, indem Sie angeben, wie die Übertragungsfunktion $G_S(s)$ lautet.

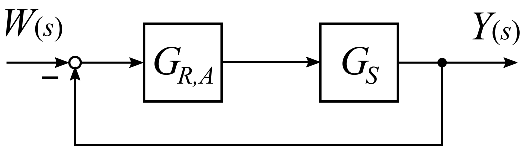

Abbildung 6: Blockschaltbild nach Umformung.

Quereinstieg: Die Streckenübertragungsfunktion $G_S(s)$ wird als

$$G_S(s) = \frac{s+2}{s(s^2+2s+4)} \tag{41}$$

identifiziert.

b) (*3 Punkte*) Benennen Sie das Übertragungsverhalten von $G_S(s)$ und geben Sie den Verstärkungsfaktor sowie alle Zeitkonstanten an. Legen Sie anschließend den Regler $G_{R,A}(s)$ nach der direkten Vorgabe für die Führungsübertragungsfunktion $G_W(s) = \frac{Y(s)}{W(s)}$ aus. $G_W(s)$ soll den kleinstmöglichen Nennergrad haben und alle Pole von $G_W(s)$ sollen bei -3 liegen.

3. Aufgabe: Musterlösung (5 Punkte)

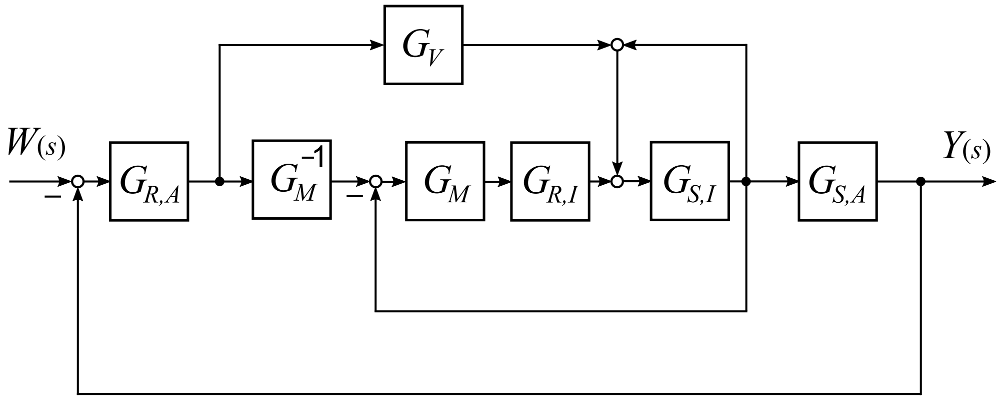

Abbildung 7: Blockschaltbild ohne Übertragungsfkt in Rückführung.

a) Blockschaltbild ohne Übertragungsfkt in Rückführung nach Abb. 7 (**0.5 Pkt**)
Die Übertragungsfunktion G_S lautet:

$$G_S = \frac{G_{S,A}\, G_{S,I}\, (G_V + G_{R,I})}{1 - G_{S,I} + G_{S,I}\, G_{R,I}\, G_M} \quad (\mathbf{1.5\ Pkt}) \quad . \tag{42}$$

b) Es handelt sich um ein schwingungsfähiges PIT_2-Glied (**0.5 Pkt**). In der Form

$$G_S = K_P \left(1 + \frac{K_I}{s}\right) \frac{1}{T_2^2\, s^2 + T_1\, s + 1} \tag{43}$$

lauten die Konstanten: $K_P = 0.25$; $K_I = 2$ ($T_I = 0.5$); $T_2 = 0.5$; $T_1 = 0.5$ (**0.5 Pkt**).
Die Führungsübertragungsfunktion lautet

$$G_W = \frac{9}{(s+3)^2} \quad (\mathbf{1\ Pkt}) \quad . \tag{44}$$

Die Reglerübertragungsfunktion lautet

$$G_R = \frac{9(s^2 + 2s + 4)}{(s+2)(s+6)} \quad (\mathbf{1\ Pkt}) \quad . \tag{45}$$

4. Aufgabe: Frequenzgang (8.5 Punkte)

Gegeben sei das folgende Blockdiagramm.

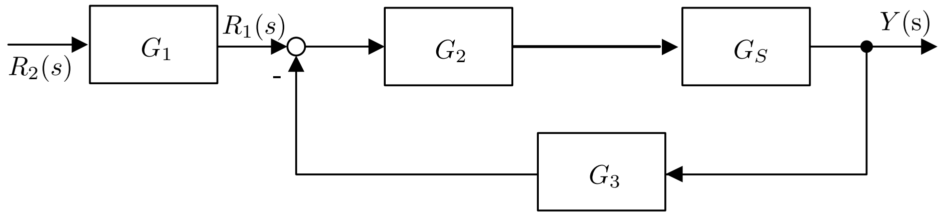

Abbildung 8: Blockschaltbild

Das Bode-Diagramm der Strecke G_S ist Ihnen in Abb. 10 gegeben. Die Übertragungsfunktionen (G_1, G_2 und G_3) sind im Folgenden zu bestimmen. Hierbei soll $G_1(s)$ eine beliebige, realisierbare Übertragungsfunktion sein. Für G_2 soll ein P-Regler gewählt werden und die Rückkopplung G_3 soll entweder zu 0 oder 1 gewählt werden.

a) (*2 Punkte*) Bestimmen Sie zunächst $G_2 \in \mathbb{R}$ und $G_3 \in \{0, 1\}$ so, dass ein stationäres Signal $R_1(s)$ zu einem 10 mal so großen Ausgangssignal $Y(s)$ führt.

Quereinstieg: Verwenden Sie nachfolgend unbedingt für die Übertragungsfunktion von $R_1(s)$ nach $Y(s)$:

$$G_{innen}(s) = \frac{Y(s)}{R_1(s)} = \frac{10}{1 + 10s}$$

b) (*2 Punkte*) Zeichnen Sie $G_{innen}(s) = \frac{Y(s)}{R_1(s)}$ ins beigefügte Bode-Diagramm ein. Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $G_1(s)$ so, dass Schwingungen am Signal $R_2(s)$ mit Frequenzen zwischen 1 rad/s und 10 rad/s zu Schwingungen mit 10-facher Amplitude am Ausgang $Y(s)$ führen.

c) (*1.5 Punkte*) Zeichnen Sie $G_1(s)$ und $G_0(s) = \frac{Y(s)}{R_2(s)}$ ins Bode-Diagramm ein.

d) (*3 Punkte*) Überprüfen Sie die Stabilität des in Abb. 9 gezeigten geschlossenen Regelkreises mit Hilfe des Nyquist-Kriteriums. Zeichnen Sie die Ortskurve des Frequenzganges des offenen Regelkreises $G_0(s)$. Kennzeichnen Sie alle markanten Punkte der Ortskurve und geben Sie die dazugehörigen Werte von $|G_0(j\omega)|$ an. Kennzeichnen Sie bitte auch $\omega = 0$ und $\omega \to \infty$. Markieren Sie außerdem mit einem Pfeil den Verlauf der Ortskurve von $\omega = 0$ nach $\omega \to \infty$. Wie groß ist die Amplituden- und die Phasenreserve?

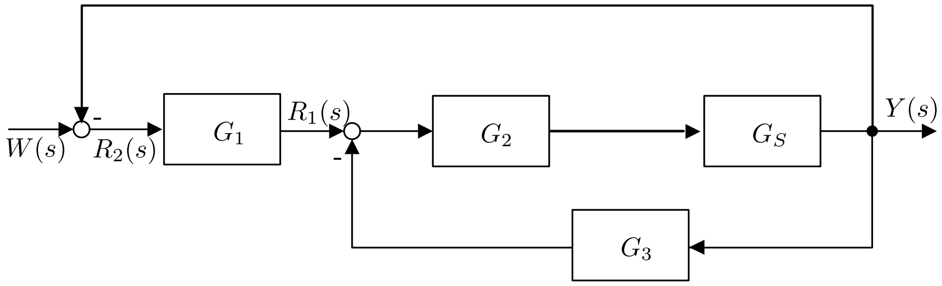

Abbildung 9: Blockschaltbild mit Rückkopplung

Musterlösung

a) (*2.5 Punkte*)
Die Strecke ist ein instabiles PT1. $G_s = \frac{1}{1-s}$

(0.5 Punkte)

Zum Stabilisieren muss der Regelkreis geschlossen werden. $G_3 = 1$

(0.5 Punkte)

G_2 muss folgende Bedingungen erfüllen:

$$\frac{G_2 G_s}{1 + G_2 G_s} = 10 \tag{46}$$

(0.5 Punkte)

$$1 + G_2 < 0 \tag{47}$$

(0.25 Punkte)

G_s einsetzen...

$$\frac{G_2}{1 - s + G_2} = 10 \tag{48}$$

(0.25 Punkte)

Daraus folgt für $\omega = 0$:

$$G_2 = -10/9 \tag{49}$$

(0.5 Punkte)

b) (*2 Punkte*)
Zeichnen von G_{innen} ins Bodediagramm.

(0.5 Punkte)

Mögliche Lösung mit Loop-Shaping:

$$G_1 = \frac{1 + 10s}{0.1s + 1} \tag{50}$$

(1.5 Punkte)

c) (*1 Punkt*)
Zeichnen von $G_1(s)$ ins Bodediagramm.

(0.5 Punkte)

Zeichnen von $G_0(s)$ ins Bodediagramm.

(0.5 Punkte)

d) (*3 Punkte*)
Ortskurve mit Richtungspfeil gezeichnet.

(0.75 Punkt)

Markante Punkte und kritischen Punkt eingetragen.

(0.5 Punkt)

Achsenbeschriftung und $G_0(j\omega)$ angeschrieben.

(0.25 Punkte)

System ist asymptotisch stabil.

(0.5 Punkte)

Phasenreserve ist 90°.

(0.5 Punkte)

Amplitudenreserve ist unendlich.

(0.5 Punkte)

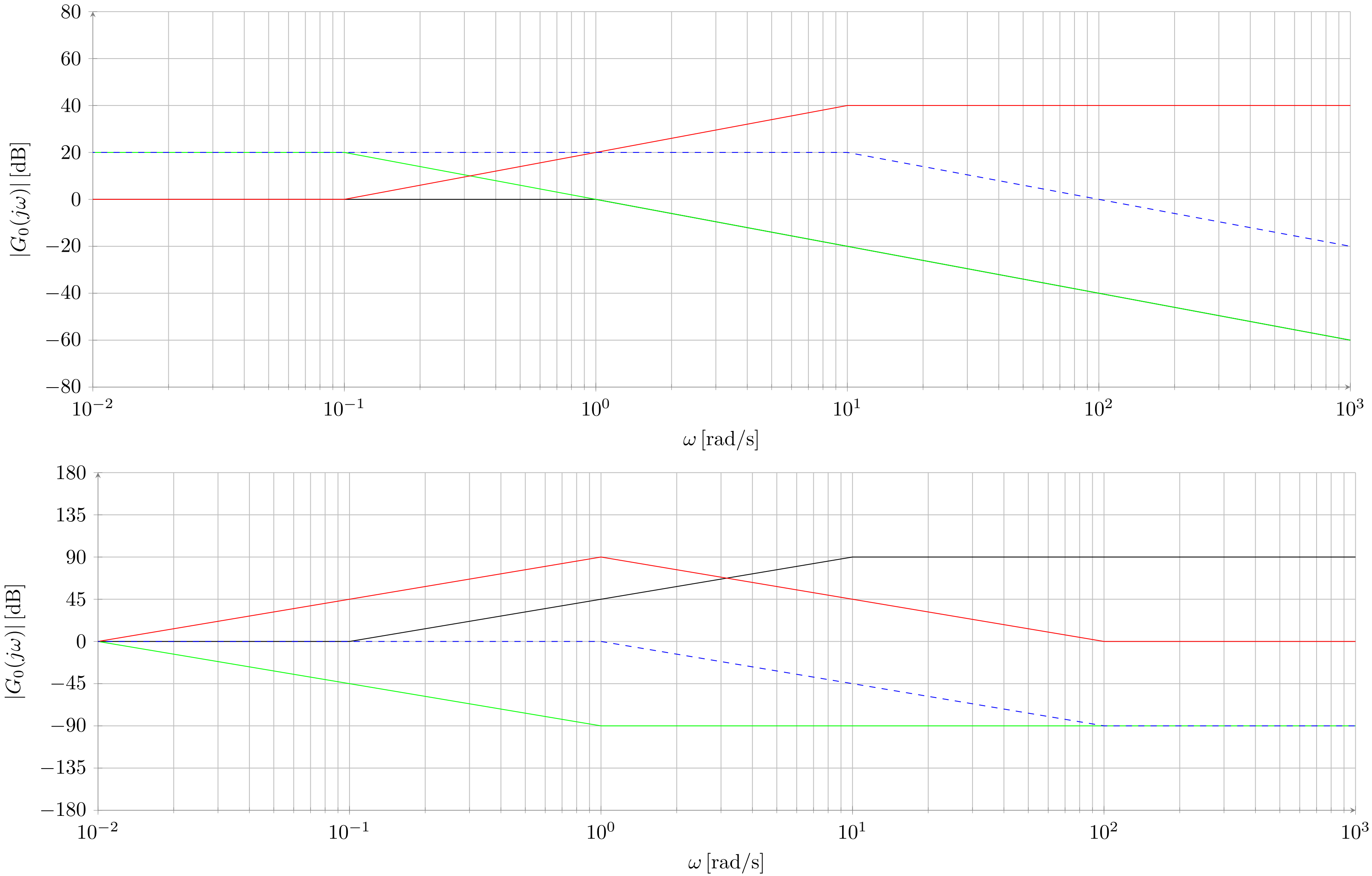

Abbildung 10: Bodediagramm für Aufgabe x

5. Aufgabe: Messtechnik (5 Punkte)

Gegeben sei folgende elektrische Schaltung, bestehend aus einem Operationsverstärker (OPV), zwei elektrischen Widerständen $R_1, R_2 > 0$, einer Spule mit der Induktion $L > 0$ und einem Kondensator mit der Kapazität $C > 0$. Der OPV kann als ideal angenommen werden.

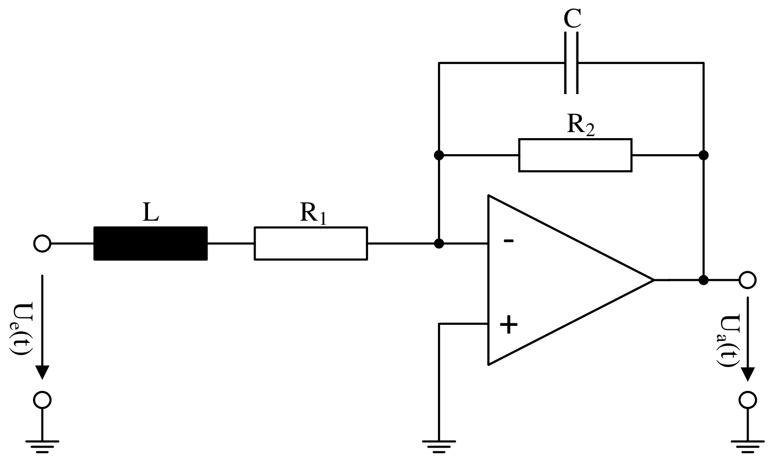

Abbildung 11: Elektrische Schaltung mit Operationsverstärker

a) (*2.5 Punkte*) Nutzen Sie die kirchhoffschen Gesetze, um das Übertragungsverhalten $G(j\omega) = U_a(j\omega)/U_e(j\omega)$ der elektrischen Schaltung zu bestimmen. Bringen Sie die Übertragungsfunktion $G(j\omega)$ zunächst in die Form:

$$G(j\omega) = K \cdot \frac{1}{1 + T_1 j\omega} \cdot \frac{1}{1 + T_2 j\omega} \quad .$$

Danach bringen Sie die Übertragungsfunktion in die folgende Form:

$$G(j\omega) = \frac{K}{1 + T_3 j\omega + {T_4}^2 (j\omega)^2} \quad .$$

b) (*1 Punkt*) Begründen Sie ob das System asymptotisch stabil, grenzstabil oder instabil ist und charakterisieren Sie die Schwingungsfähigkeit des Systems anhand von Parametern der Übertragungsfunktionen aus a).

c) (*1.5 Punkte*) Das Dämpfungsmaß D des 2. PT_2-Übertragungsgliedes aus a) ist definiert als:

$$D = \frac{T_3}{2T_4}$$

Berechnen Sie D abhängig von R_1, R_2, C und L und erläutern Sie Ihre Aussage aus b) anhand des Wertebereichs von D.

5. Aufgabe Musterlösung

a) 2.5 Punkte

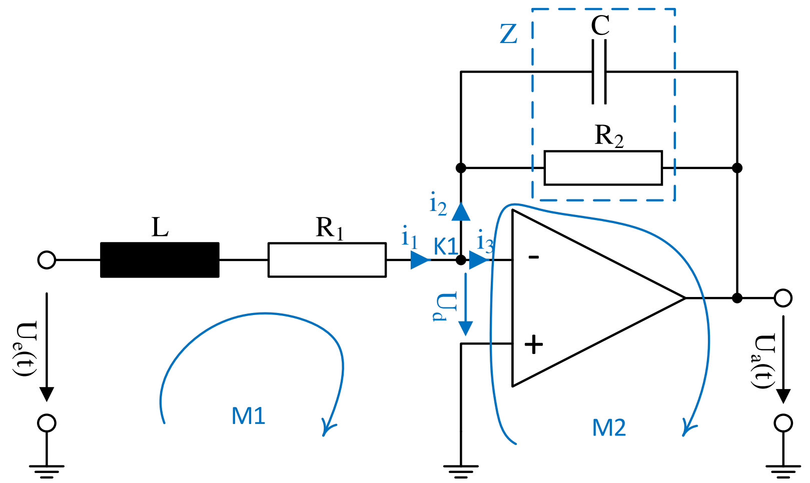

Abbildung 12: Elektrische Schaltung mit Operationsverstärker, Musterlösung

idealer OPV: $U_d = 0$, $i_3 = 0$

K1:

$$i_1 = i_2 \tag{51}$$

Z:

$$Z = \frac{R_2 \frac{1}{j\omega C}}{R_2 + \frac{1}{j\omega C}} \tag{52}$$

oder Alternativ dritte Masche (0.5 Punkte)

M1:

$$U_e = i_1(j\omega L + R_1) \tag{53}$$

(0.5 Punkte)

M2:

$$U_a = -i_1 Z \Rightarrow i_1 = -U_a \frac{R_2 + \frac{1}{j\omega C}}{R_2 \frac{1}{j\omega C}} \tag{54}$$

(0.5 Punkte)

M2 in M1:

$$U_e = -U_a \frac{R_2 + \frac{1}{j\omega C}}{R_2 \frac{1}{j\omega C}} (j\omega L + R_1) \tag{55}$$

$$\Rightarrow G(j\omega) = \frac{U_a(j\omega)}{U_e(j\omega)} = -\frac{R_2}{(1 + j\omega C R_2)(j\omega L + R1)} \tag{56}$$

$$\Rightarrow G(s) = -\frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{1}{1 + CR_2 s} \cdot \frac{1}{1 + \frac{L}{R_1} s} \tag{57}$$

(0.5 Punkte)

$$\Rightarrow G(s) = \frac{-\frac{R_2}{R_1}}{CR_2\frac{L}{R_1}s^2 + (CR_2 + \frac{L}{R_1})s + 1} \tag{58}$$

(0.5 Punkte)

b) 1 Punkt

Die Pole der Übertragungsfunktion $G(s)$ liegen bei $p_1 = \frac{-1}{T_1} = \frac{-1}{CR_2}$ und $p_2 = \frac{-1}{T_2} = \frac{-R_1}{L}$.
Sie liegen somit

- in der linken s-Halbebene => stabil, (0.5 Punkte)
- und sind rein reell => nicht schwingungsfähig. (0.5 Punkte)

c) 1.5 Punkte

$$D = \frac{CR_2 + \frac{L}{R_1}}{2\sqrt{CR_2\frac{L}{R_1}}} \tag{59}$$

(0.5 Punkte)

Offensichtlich folgt aus $R_1, R_2, C, L > 0 \Rightarrow D \geq 0$.
Daher ist das Übertragungsverhalten stabil. (0.5 Punkte)

Annahme: $D \geq 1$

$$\frac{CR_2 + \frac{L}{R_1}}{2\sqrt{CR_2\frac{L}{R_1}}} \geq 1 \tag{60}$$

$$\Rightarrow CR_2 + \frac{L}{R_1} \geq 2\sqrt{CR_2\frac{L}{R_1}} \tag{61}$$

$$\Rightarrow (CR_2 + \frac{L}{R_1})^2 \geq 4CR_2\frac{L}{R_1} \tag{62}$$

$$\Rightarrow (CR_2)^2 + 2CR_2\frac{L}{R_1} + (\frac{L}{R_1})^2 \geq 4CR_2\frac{L}{R_1} \tag{63}$$

$$\Rightarrow (CR_2)^2 - 2CR_2\frac{L}{R_1} + (\frac{L}{R_1})^2 \geq 0 \tag{64}$$

$$\Rightarrow (CR_2 - \frac{L}{R_1})^2 \geq 0, \qquad \text{w.A.} \tag{65}$$

Da $D \geq 1$ handelt es sich um ein nicht schwingungsfähiges PT2-Glied. (0.5 Punkte)

(alternative Annahme: $D < 1$, f.A., => nicht schwingungsfähig)