Messtechnik

Gedächnisprotokoll – Klausur 2012

25. März 2012

★ Dokument erstellt von: mailto:snooozer@gmx.de ★

Aufgaben

Unser Lösungsansatz (ohne Garantie)

Es wurde die Kapazität von 10 Kondensatoren gleicher Bauart gemessen:

Index k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
C_k $[\mu F]$	101	95	105	105	96	103	94	108	98	90

1.1 Parameterschätzung (1 Punkt)

Berechnen Sie den empirischen Mittelwert und die empirische Standardabweichung der Kapazitätswerte.

1. empirischer Mittelwert:
   $\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i$
2. empirische Varianz:
   $s^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x})^2$
3. empirische Standardabweichung:
   $s = \sqrt{s^2}$

1.2 Vertrauensintervall (1 Punkt)

Tabelle 1: Vertrauensbereiche für bekannte Standardabweichung σ

$t\sigma$	$0,5\sigma$	$0,67\sigma$	1σ	$1,65\sigma$	$1,96\sigma$	$2,58\sigma$	3σ	$3,3\sigma$
P [%]	38,3	50	68,3	90	95	99	99,73	99,9

1. Angenommen die wahre Standardabweichung der Verteilung sei $\sigma = 2\,\mu F$. Berechnen Sie das Vertrauensintervall des in Aufgabe 1.1 geschätzten Mittelwerts.
   Die statistische Sicherheit soll 68,3 % betragen. (0,5 Punkte)

   $V_{1,2} = \bar{x} \pm \dfrac{t \cdot \sigma}{\sqrt{N}}$ mit t als Parameter aus der Tabelle und N als Anzahl der Messwerte.

   statistische Sicherheit soll 68,3 % betragen $\Rightarrow$ $t = 1$

2. Wie viele Messwerte müssten aufgenommen werden, damit der Vertrauensbereich höchstens $\pm 1\mu F$ beträgt? Die statistische Sicherheit soll weiterhin 68,3 % betragen. (0,5 Punkte)

   $\pm 1\mu F \stackrel{!}{=} \pm \dfrac{1 \cdot 2\,\mu F}{\sqrt{N}}$

1.3 Verteilungsfunktion (2 Punkte)

1. Geben Sie die allgemeine Definition an, wie die Verteilungsfunktion und Verteilungsdichte zusammenhängen.

2. Berechnen Sie die Verteilungsfunktion $F(x)$ für alle $x \in [-\infty, \infty]$ zu folgender Dichte:
$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{3}{5}, & \text{wenn } 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{5}, & \text{wenn } 1 \leq x < 3 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Die Lösung kann mathematisch oder graphisch angegeben werden. In einer Grafik sind die Knickpunkte und die Achsen eindeutig zu beschriften!

Nutze: $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(x)\, dx....$

2 Fragen (1 Punkt)

Kennzeichnen Sie die richtigen Aussagen (Für jede falsche Antwort werden 0,5 Punkten abgezogen. Die minimale Punktzahlen für die gesamte Aufgabe beträgt 0):

1. Der Vertrauensbereich des Mittelwerts gibt ein Intervall an, in dem mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit der wahre Mittelwert liegt. Ja
2. Die Verteilungsdichtefunktion ist die Stammfunktion der Verteilungsdichte. Nein
3. Systematische Fehler können durch Mittelwertbildung und andere Statistische Mittel minimiert werden. Ja
4. Die Verteilungsdichtefunktion hat eine Fläche von 1. Ja

3 Regression und Interpolation (5 Punkte)

Ein Thermometer wird in $T_a = 60°C$ heißes Wasser getaucht. Die Anfangstemperatur des Thermometers beträgt $T_e = 30°C$.

Bei der Messung der Kennlinie wurden die folgende Messwerte aufgenommen:

Index k	1	2	3	4	5
Zeit t	0	20	40	60	80
Temperatur $°C$	30	46	53	57	59

3.1 Parameterschätzung (3 Punkte)

Es soll der Parameter τ der Kennlinie $T(t) = (T_e - T_a) \cdot \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right]$ mithilfe der Methode der kleinsten Fehlerquadrate berechnet werden.

1. Geben Sie eine Transformation für $T(t)$ an, mit deren Hilfe sich die Methode der kleinsten Fehlerquadrate anwenden lässt, markieren Sie in ihrer Lösung y,a,x in der Form: $y = m \cdot x$ (0,5 Punkte)

$$T(t) = (T_e - T_a) \cdot \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right]$$

$$\frac{T(t)}{(T_e - T_a)} = 1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

$$\frac{T(t)}{(T_e - T_a)} - 1 = -\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

$$-\frac{T(t)}{(T_e - T_a)} + 1 = \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

$$\ln\left(-\frac{T(t)}{(T_e - T_a)} + 1\right) = \left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

$$f(x_i) = y = \ln\left(-\frac{T(t)}{(T_e - T_a)} + 1\right)$$

$$m = -\frac{1}{\tau}$$

$$x = t$$

$$\Rightarrow Form: y = m \cdot x$$

2. Leiten Sie die Lösungsfomel zur Berechnung von τ nach der Methode der kleinsten Fehlerquadrate her (2 Punkte)

$$Err = \sum_{i=1}^{N}(y_i - f(x_i))^2 = \sum_{i=1}^{N}\left[-\frac{t}{\tau} - \ln\left(-\frac{T(t)}{(T_e - T_a)} + 1\right)\right]^2$$

$$\frac{\partial Err}{\partial \tau} = -2 \cdot \sum_{i=1}^{N}\left[-\frac{t}{\tau} - \ln\left(-\frac{T(t)}{(T_e - T_a)} + 1\right)\right] \cdot \frac{t}{\tau^2} \overset{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \quad 2 \cdot \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{t^2}{\tau^3}\right) + 2 \cdot \sum_{i=1}^{N}\left[\ln\left(-\frac{T(t)}{(T_e - T_a)} + 1\right) \cdot \frac{t}{\tau^2}\right] \overset{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{2}{\tau^3} \cdot \sum_{i=1}^{N} t^2 + \frac{2}{\tau^2} \cdot \sum_{i=1}^{N}\left[\ln\left(-\frac{T(t)}{(T_e - T_a)} + 1\right) \cdot t\right] \overset{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{2}{\tau^3} \cdot \sum_{i=1}^{N} t^2 \overset{!}{=} -\frac{2}{\tau^2} \cdot \sum_{i=1}^{N}\left[\ln\left(-\frac{T(t)}{(T_e - T_a)} + 1\right) \cdot t\right]$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{\tau} \overset{!}{=} -\frac{\sum_{i=1}^{N}\left[\ln\left(-\frac{T(t)}{(T_e - T_a)} + 1\right) \cdot t\right]}{\sum_{i=1}^{N} t^2}$$

$$\tau = -\frac{\sum_{i=1}^{N} t^2}{\sum_{i=1}^{N}\left[\ln\left(-\frac{T(t)}{(T_e - T_a)} + 1\right) \cdot t\right]}$$

3. Berechnen Sie τ mit Hilfe der für die Temperatur und Zeit gegebenen Werte (0,5 Punkte) mit den gegebenen Werten ($T_a = 60°C$ und $T_e = 30°C$) folgt:

Index k	1	2	3	4	5
Zeit t	0	20	40	60	80
Temperatur $°C$	30	46	53	57	59

$$\tau = -\frac{\sum_{i=1}^{N} t^2}{\sum_{i=1}^{N}\left[\ln\left(-\frac{T(t)}{(T_e - T_a)} + 1\right) \cdot t\right]} = -\frac{12000}{210,17} \approx -57,1$$

$$\Rightarrow \quad T(t) = (T_e - T_a) \cdot \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{(-57,1)}\right)\right] = (T_e - T_a) \cdot \left[1 - \exp\left(\frac{t}{57,1}\right)\right]$$

3.2 Regression vs. Interpolation (0,5 Punkte)

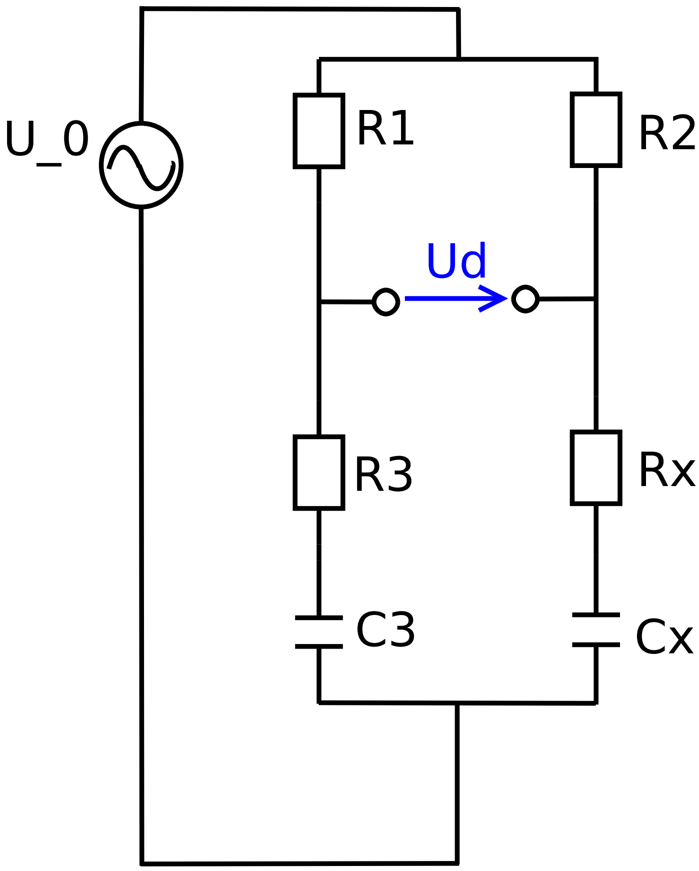
Erklären Sie den wesentlichen Unterschied zwischen Regression und Interpolation
Interpolation: die analytische Kennlinie geht exakt durch die Messpunkte

Regression: die Messpunkte werden derart nachgebildet, dass der entstehende Fehler zwischen den Messpunkten und der analytischen Funktion möglichst klein wird -> Kleinste Fehlerquadrate

4 Messbrücke (5 Punkte)

4.1 Abgleichbedingungen (1.5 Punkte)

Stellen Sie die Ableichbedingung für $U_d = 0$ der gegebenen Messbrücke auf. Das zu prüfende, reale Bauteil ist eine Spule bestehend aus L_x und R_x.



Geben Sie jeweils eine Gleichung für den Realteil und eine Gleichung für den Imaginärteil der abgeglichenen Messbrücke an ($U_d = 0$). Hinweis: Es ist nicht notwendig, konjugiert komplex zu erweitern!

Abgleichbedingung: $\frac{Z_1}{Z_2} \stackrel{!}{=} \frac{Z_3}{Z_4} \quad \Rightarrow Z_1 \cdot Z_4 = Z_3 \cdot Z_2$

4.2 (0,5 Punkte)

Geben Sie jeweils eine Gleichung für die gesuchten Bauteile R_x und C_x an für den Fall, dass die Abgleichbedingung erfüllt ist.

4.3 (1 Punkt)

Wie lässt sich der Verlustfaktor des zu prüfenden Bauteils aus den gegebenen Bauteilen berechnen?

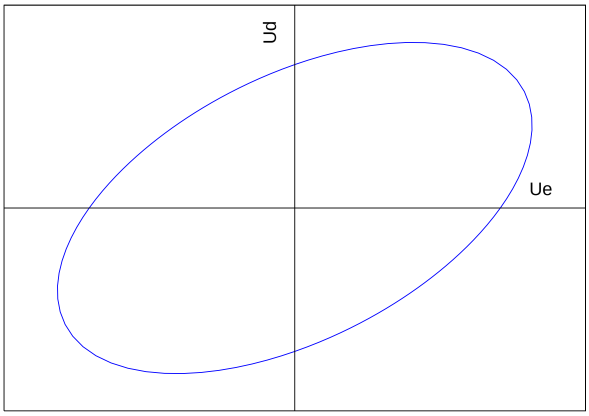
$\tan(\delta) = \left|\frac{\Re(Z_x)}{\Im(Z_x)}\right| = \left|\frac{Re(Z_x)}{Im(Z_x)}\right|$

$Z_x = Z_4 = R_x + \frac{1}{j\omega C_x}$

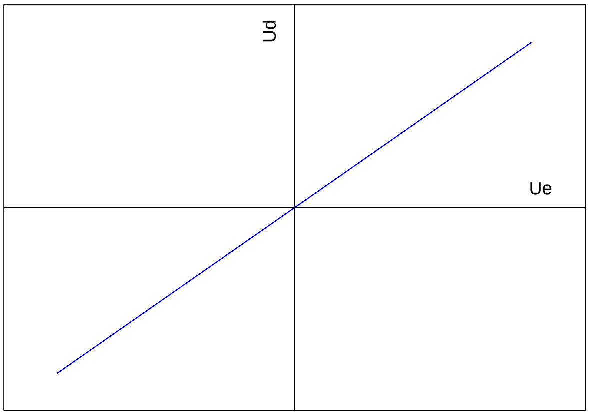
4.4 (1 Punkt)

Für den Abgleich der Brücke wurde im Labor ein Ozilloskop eingesetzt. Zeichnen Sie die entsprechenden Oszilloskopbilder die nach dem Betragsabgleich zu erkennen sind.

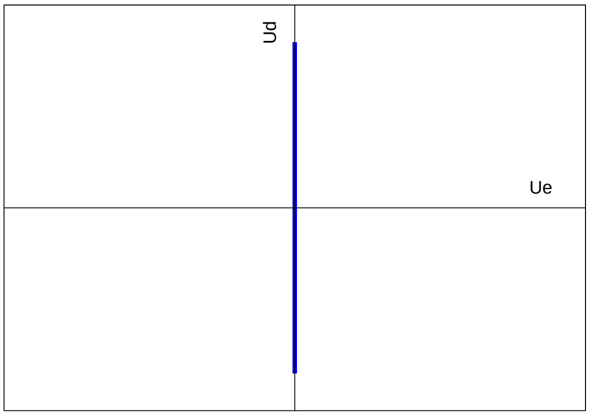
Nicht abgeglichen (Start)



Abgleich in Phase

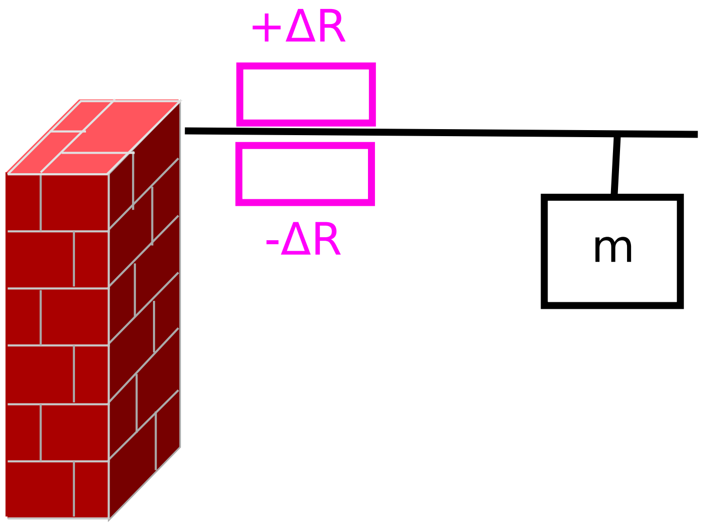


Abgleich im Betrag

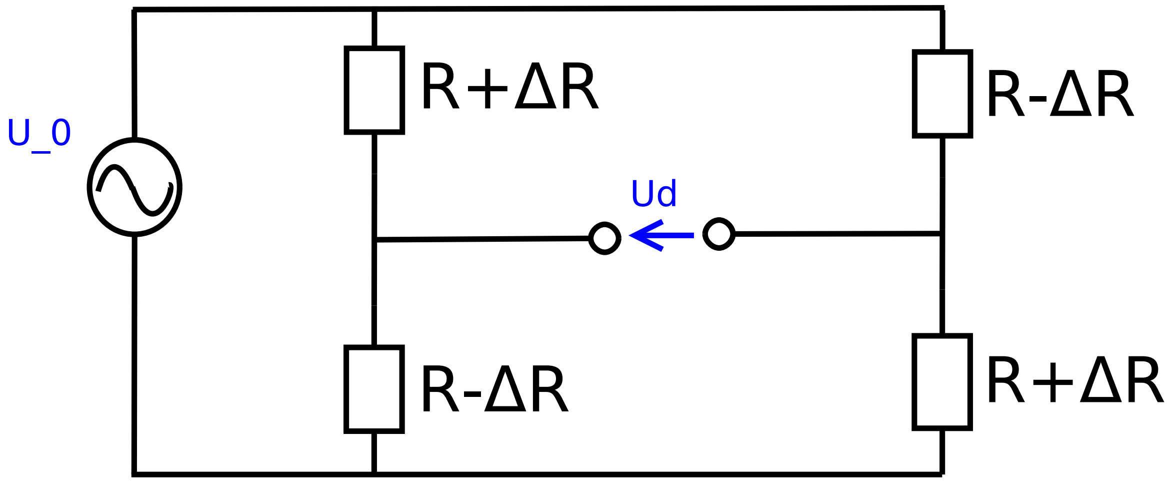


4.5 (1 Punkt)

Zeichnen Sie in die folgende Messbrücke die DMS ein. Kennzeichnen Sie hierbei deutlich welche DMS jeweils $+\Delta R$ ist bzw. $-\Delta R$. Geben Sie auch die entsprechende Messbrücke an jeweils mit $\pm\Delta R$.



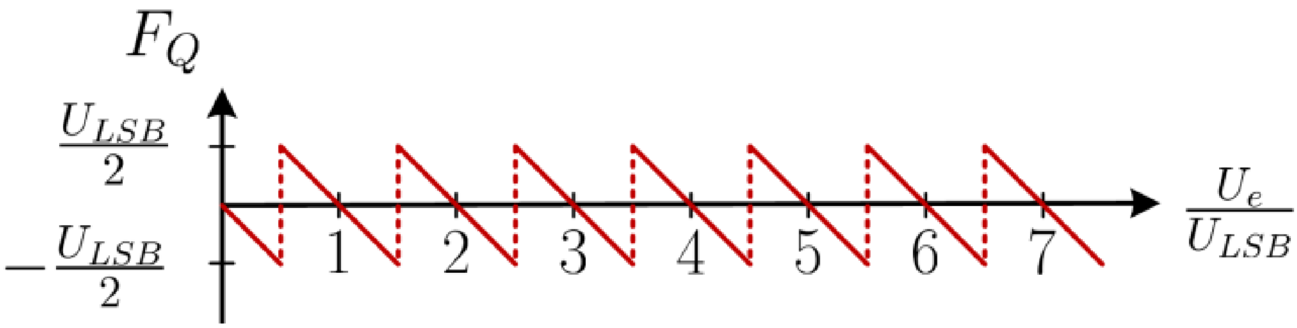
Das Gewicht könnte z.B. mit einer Viertelmessbrücke gemessen werden. Ob Hier ebenfalls eine Halbbrücke oder eine Vollbrücke als richtige Antwort gewertet werden ist unbekannt.



5 Digitale Messkette (5 Punkte)

5.1 Kennlinie eines Analog-Digital-Umsetzers (ADU)(1 Punkt)

Gegeben ist ein Analog-Digital-Umsetzer mit einer numerischen Auflösung von $n = 12$ Bit. Der Eingangsspannungsbereich beträgt 0 bis 12 Volt. Zeichnen Sie die Quantisierungsfehler Kennlinie des Umsetzers. Tragen Sie in die Zeichnung die korrekten Achsenbeschriftungen ein. Berechnen Sie den Maximalen Quantisierungsfehler.



$F_Q \leq \pm\frac{1}{2}U_{LSB}$

$U_{LSB} = \frac{U_{Max} - U_{Min}}{2^N - 1} = \frac{12\,V - (0\,V)}{2^{12} - 1}$

5.2 Nichtlinearität eines Analog-Digital-Wandlers (ADU) (1 Punkt)

Geben sie eine Definition an oder zeigen Sie an Hand einer Skizze:

1. die differentielle Nichtlinearität (DNL).
2. die integrale Nichtlinearität (INL) eines ADUs.

integrale Nichtlinearität: Die integrale Nichtlinearität ist die maximale Abweichung zwischen der Funktion, die durch die Mitten der Quantisierungsstufen des realen ADU gelegt wird, und der Geraden durch die ideale Kennlinie.

differenzielle Nichtlinearität: Die differenzielle Nichtlinearität ist die maximale Abweichung der Stufenbreite von ihrem idealen Wert (1 LSB). Übersteigt die differentielle Nichtlinearität an einer Quantisierungsstufe den Wert eines LSB, so wird der zugehörige Ausgangswert nicht ausgegeben und als "missing code"bezeichnet.

5.3 Aliasing (2 Punkte)

Es sollen Signale mit einer Frequenz von bis zu 1 kHz aufgenommen werden. Hierfür steht ein 12 Bit-Analog-Digital-Umsetzer (ADU) mit einem Eingangsspannungsbereich von 0 bis 12 Volt zur Verfügung.

1. Erlütern Sie das Theorem von Shannon. (0,5 Punkte)

   Nach Nyquist-Shannon-Abtasttheorem mindestens doppelte Abtastfrequenz.

2. Berechnen Sie die Auflösung U_{LSB} des Analog-Digital-Umsetzers. (0,5 Punkte)

   $$U_{LSB} = \frac{U_{Max} - U_{Min}}{2^N - 1} = \frac{12\,V - (0\,V)}{2^{12} - 1}$$

3. Es soll mit einer Frequenz von 40kHz abgetastet werden. Entwerfen Sie den Filter so, dass er eine Grenzfrequenz von $1,2kHz$ aufweißt. Bestimmen Sie die Ordnung des benätigten Aliasing-Filters. (1 Punkt)

   $$\frac{-20 \cdot \log_{10}\left(\frac{U_{LSB}}{U_{Max} - U_{Min}}\right)}{\log_{10}\left(\frac{\omega_s}{2 \cdot \omega_g}\right)}$$

4. Leiten sie die Formel des Signal Rausch Abstandes in Dezibel her bei einer Effektiven Rauschleistung von $U_{eff,Rausch} = \frac{U_{LSB}}{\sqrt{12}}$.

   $$\text{SNR}\Big|_{dB} = 10 \cdot \log_{10}\left(\frac{U^2_{\text{eff,Signal}}}{U^2_{\text{eff,Rauschen}}}\right)\Big|_{dB} = 20 \cdot \log_{10}\left(\frac{U_{\text{eff,Signal}}}{U_{\text{eff,Rauschen}}}\right)\Big|_{dB}$$

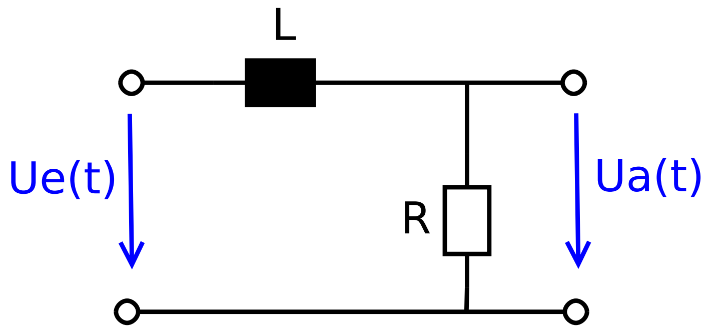
   Mit: $U_{\text{eff,Signal}} = \frac{U_{\text{Max}} - U_{\text{Min}}}{2\sqrt{2}}$ ***und:*** $U_{\text{eff,Rauschen}} = \frac{U_{\text{LSB}}}{\sqrt{12}} = \frac{1}{\sqrt{12}} \frac{U_{\text{Max}} - U_{\text{Min}}}{2^N - 1}$ ***folgt:***

   $$\text{SNR}\Big|_{dB} = 20 \cdot \log_{10}\left(\frac{U_{\text{Max}} - U_{\text{Min}}}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{12}}{1} \frac{2^N - 1}{U_{\text{Max}} - U_{\text{Min}}}\right)\Big|_{dB} = 20 \cdot \log_{10}\left(\sqrt{\frac{12}{8}}(2^N - 1)\right)\Big|_{dB}$$

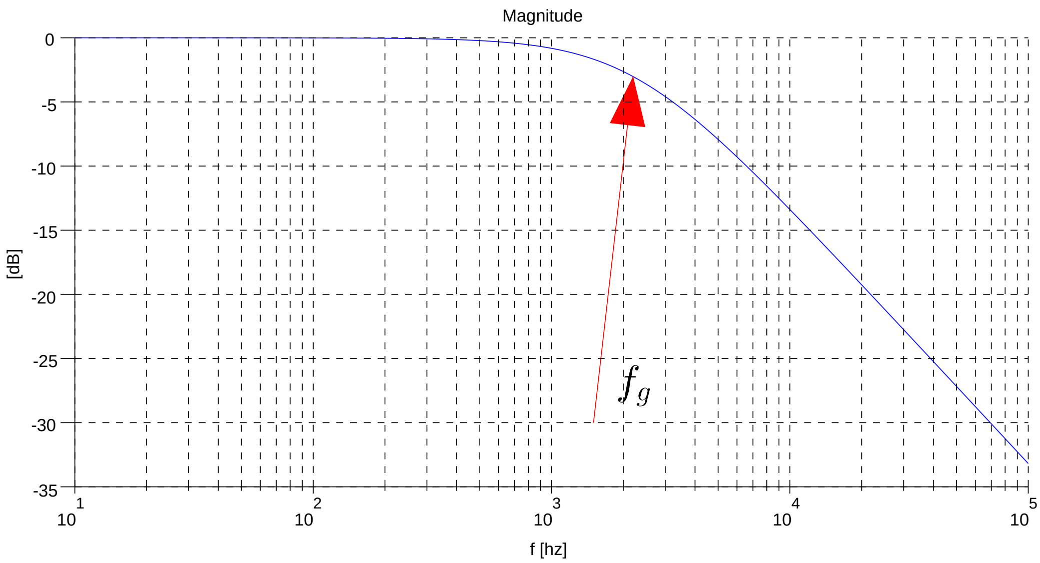
6 Eigenschaften von Messsystemen (5 Punkte)

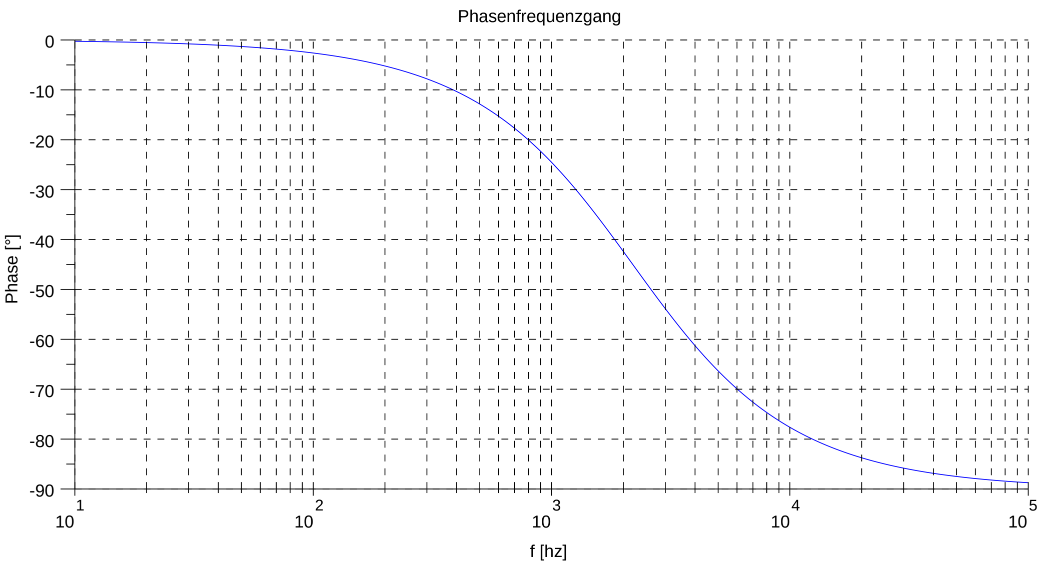
6.1 Tiefpass erster Ordnung (3 Punkte)

In dem folgenden Bild ist ein Tiefpass-Filter erster Ordnung dargestellt.



1. Skizzieren Sie den Betrag- und Phasenfrequenzgang des Filters. Beschriften Sie die Achsen.





2. Es sind folgende Werte gegeben: $R = 96\Omega$ und $L = 10mH$. Berechnen Sie daruas die Übertragungsfunktion $G(s)$ und den Betragsfrequenzgang des Filters.

$$G(s) = \frac{U_a}{U_e} = \frac{1}{s \cdot \frac{L}{R} + 1}$$

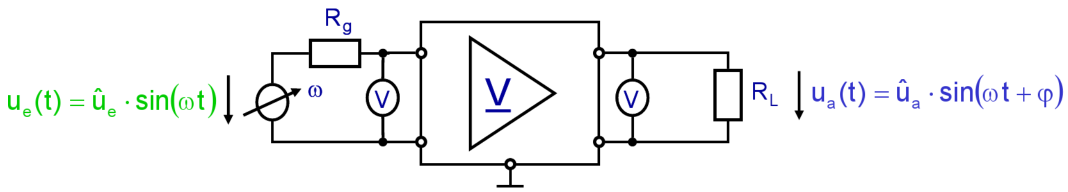
$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\omega \cdot L}{R}\right)^2 + 1}}$$

3. Bestimmen Sie die 3-dB-Grenzfrequenz des Filters. Skalieren Sie nun die Achsen und markieren Sie die Grenzfrequenz in Ihrer Zeichnung.

$$|G(j\omega)| \overset{!}{=} \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Hinweis: Das bedeutet am Ende unsere selbstgebaute Scilab Frequenz und Phasenfrequenz plot Dings ist falsch skaliert, soll aber nur verdeutlichen wie der Grafiken im Prinzip aussehen....xD

4. Sie haben die Aufgabe, den Betragsfrequenzgang des Tiefpass-Filters zu bestimmen. Geben Sie eine Messschaltung zur Aufnahme des Betragsfrequenzgangs an. Welche Grössen müssen Sie messen und welche Geräte benötigen Sie?



$$|G(jw)| = 20 \cdot \log_{10}\left(\frac{U_a}{U_e}\right)$$

6.2 Kennlinie (1 Punkt)

Welche Einstellmöglichkeiten einer Kennlinie kennen Sie? Nennen Sie mindestens eine und erklären Sie von Ihrnen genannten Einstellmöglichkeiten mindestens eine davon.

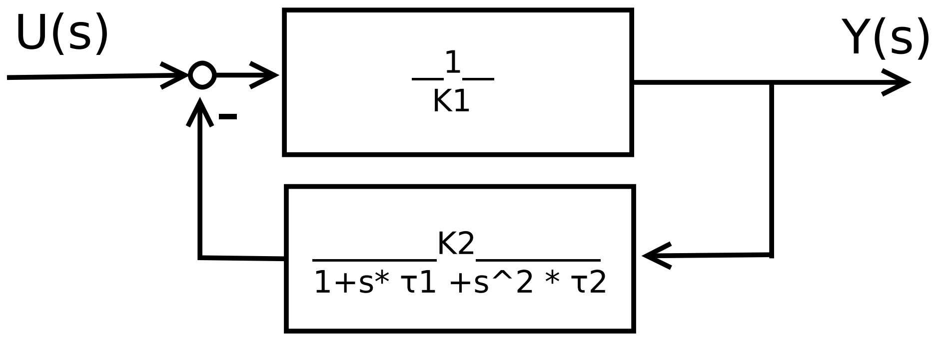
Fixpunkteinstellung: Kennlinie geht nach der Justierung durch den Anfangspunkt (u_a, y_a) und durch den Endpunkt (u_e, y_e). Im Messanfang und Messende sind die Fehler Null.

Toleranzbandeinstellung: Additive Verschiebung der Fixpunkteinstellung oder 'Summe der Fehlerquadrate' mit dem Ziel, Fehler möglichst klein zu machen. Einstellung meist so, dass Abweichungen von der idealen Geraden symmetrisch sind.

Anfangspunkteinstellung: Die Kennlinie geht durch den Anfangspunkt (u_a, y_a), d.h. der Offsetfehler wird korrekt abgeglichen. Die Verstärkung wird derart eingestellt, dass eine Symmetrisierung des Fehlers in beide Richtungen entsteht.

6.3 Zusammengesetzte Systeme (1 Punkt)

Ein Messsystem besitzt die im Bild dargestellte Struktur. Beachten Sie das Minuszeichen am Summationspunkt. Bestimmen Sie die gesamte Übertragungsfunktion $G(s)$.



Der Summationspunkt ergibt sich mit:

$$A(s) = -Y(s) \cdot \left(\frac{K2}{1 + s \cdot \tau_1 + s^2 \cdot \tau_2} \right) + U(s)$$

$$Y(s) = \left(\frac{1}{K1} \right) \cdot A(s)$$

$$Y(s) = \left(\frac{1}{K1} \right) \cdot \left[-Y(s) \cdot \left(\frac{K2}{1 + s \cdot \tau_1 + s^2 \cdot \tau_2} \right) + U(s) \right]$$

...

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

7 Leistungsmessung (5 Punkte)

7.1 Leistungsmessung an einem Kondensator (1,5 Punkte)

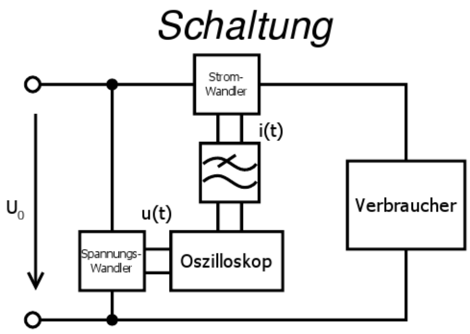
Eine Schaltung enthält einen realen Kondensator. Sie haben die Aufgabe, die Blindleistung an dem Kondensator zu messen. Der Kondensator besitzt also einen ohmschen und einen induktiven Anteil. An der Spule liegt eine rein sinusförmige Spannung an ($50Hz$, keine Oberwellen).

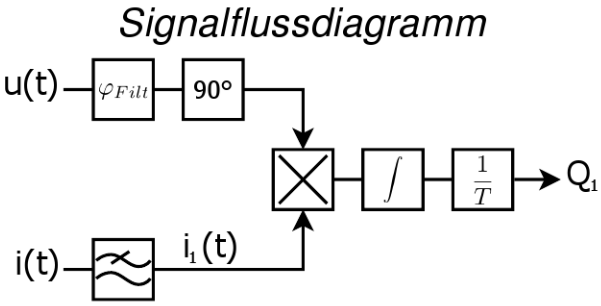
1. Skizzieren sie eine Schaltung zur Bestimmung der Blindleistung. Kennzeichnen Sie hierbei wie die Messgeräte mit dem Kondensator verschaltet werden müssen um die Blindleistung zu messen. Markieren Sie deutlich die Verbindungspunkte.

2. Wie lautet die Berechnungsformel der Blindleistung für diese Anwendung?

3. Erläutern sie kurz wozu die verwendeten Messgeräte notwendig sind.

1.





2. $Q_1 = U \cdot I_1 \cdot \sin(\varphi_1)$

3. Prinzipiell sollte man wissen, dass sobald keine Oberschwingungen vorhanden sind, nur noch die Grundschwingungsblindleistung vorhanden ist! Die Mathematischenflussdiagramme, sind hierbei leider auch nicht die richtige Lösung.

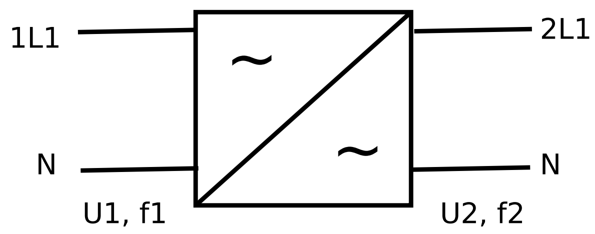
   Als Lösung ist hier gefragt (siehe Labor 10 bzw. 9 Praktische Aufgaben):
   Zunächst werden die Verstärkungsfaktoren für den Spannungs- bzw. Stromwandlers benötigt. (Diese finden sich im Labor 5.5.3 – Übertragungsverhältnis Stromwandler und im Kapitel 5.5.4 – Übertragungsverhältnis Spannungswandler).
   In Labor 9 wird die komplette Blindleistung gemessen, dies wäre eine gültige Antwort für die Aufgabe, da aber die gesamte Blindleistung nach Aufgabenstellung nur aus der Grundschwingungsblindleistung besteht reicht es zu behaupten, dass diese im Dreiphasennetz gemessen wird und somit die Blindleistung mithilfe eines Wirkleistungsmessgeräts bestimmt werden kann
   – **KEINE GARANTIE**.
   Sonst siehe Labor 8.

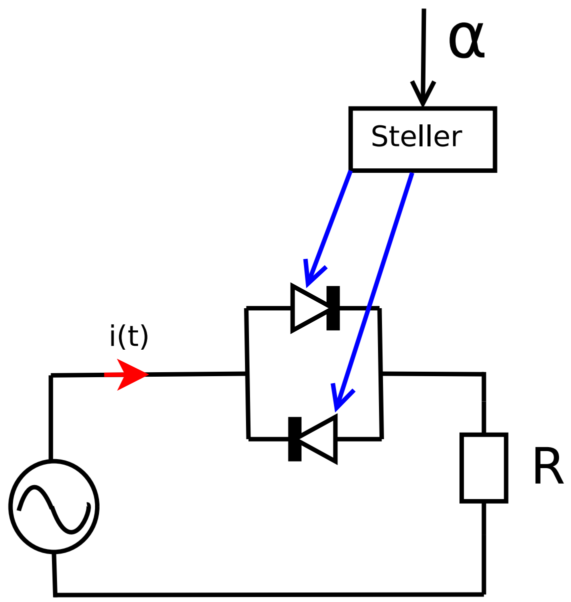
   - ♣ Die Wirkleistung kann bestimmt werden, in dem am Osizilloskop der Kanal eins und zwei miteinander multipliziert werden und mittels der Mathefunktion der Durchschnittswert Vavg berechnet wird. Dieses Ergebnis muss dann noch durch die Verstärkungsfaktoren geteilt werden. Da wir nun wie oben behauptet im Dreiphasennetz arbeiten ist die Wirkleistung durch den 90° verschobenen Strom die **Blindleistung**. Hierbei kommt aber noch der Korrekturfaktor $\sqrt{3}$ hinzu.

     $$Q = \frac{V_{avg}(Channel_1 \cdot Channel_2)}{\sqrt{3} \cdot V_i \cdot V_u}$$

7.2 Leistungen am Wechselstromsteller (1 Punkt)

Die Leistungsverläufe an einem Wechselstromsteller werden untersucht. Dabei wird an einer ohmschen Last R der Anschnittswinkel α der Thyristoren verändert (siehe Abbildung).





Mit Hilfe von Messgeräten wurden folgende Messwerte aufgenommen:

Instrument	Messbereich	Klasse	Anzeige
Strommesser ('echter' Effektivwert)	10A	0,5	4A
Spannungsmesser('echter' Effektivwert)	500V	0,5	230V
Wirkleistungsmesser	1500W	1,0	874 W
Grundschwingungsblindleistungsmesser (Q1)	750 Var	1,0	210 Var

Berechnen Sie:

1. die Scheinleistung S.
2. Geben Sie den Fehler an, der nach der Fehlerfortpflanzung entsteht.

1. $S = U_{eff} \cdot I_{eff}$

2. $G_y = \pm \sum_{i=1}^{N} \left| \frac{\partial y}{\partial x_i} G_i \right| = \pm \Big(|x_2 \cdot G_1| + |x_1 \cdot G_2| \Big) = \pm \Big(|I_{eff} \cdot G_u| + |U_{eff} \cdot G_i| \Big)$

$$G_z = \frac{Messbreichsende}{100} \cdot Genauigkeitsklasse$$

$$G_i = \frac{10\ A}{100} \cdot 0,5 = 0,05\ A \qquad G_u = \frac{500\ V}{100} \cdot 0,5 = 2,5\ V$$

7.3 Lastwiderstand und Strom am Wechselstromsteller (2 Punkt)

Leiten Sie die Formel für die Effektivspannung I_{eff} für den Wechselstromsteller her (Abhängigkeit α)!

falscher Hinweis aus der Klausur: $\cos^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$

richtiger Hinweis: $\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$

Prinzipiell:

$$I_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T}\int\limits_{t_0}^{t_0+T} i^2(t)\, dt} = \sqrt{\frac{1}{T}\int\limits_{0}^{T} i^2(t)\, dt} = \sqrt{\frac{1}{T}\int\limits_{0}^{T} i^2(\omega t)\, d\omega t} = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{2\pi} i^2(\omega t)\, d\omega t}$$

$$I^2 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{\vartheta}^{\pi} \hat{I}^2 \sin^2(\omega t)\, d\omega t = \frac{\hat{I}^2}{\pi}\int\limits_{\vartheta}^{\pi} \frac{1}{2}(1 - \cos(2\omega t))\, d\omega t$$

$$I^2 = \frac{\hat{I}^2}{2\pi}\left[\omega t - \frac{\sin(2\omega t)}{2}\right]_{\vartheta}^{\pi} = \frac{\hat{I}^2}{2\pi}\left(\pi - \vartheta + \frac{1}{2}\sin(2\vartheta)\right)$$

$$\Rightarrow I(\vartheta) = \hat{I}\sqrt{\frac{1}{2\pi}\left(\pi - \vartheta + \frac{1}{2}\sin(2\vartheta)\right)}$$

In Abängigkeit von α :

$$I(\alpha) = \hat{I}\sqrt{\frac{1}{2\pi}\left(\pi - \alpha + \frac{1}{2}\sin(2\alpha)\right)}$$