

Grundlagen der Statistischen Nachrichtentheorie

- Prof. Dr.-Ing. Thomas Sikora -

Name:

Vorname:

Matr.Nr:

Ich bin mit der Veröffentlichung des Klausurergebnisses
unter meiner verkürzten Matrikelnummer einverstanden: Ja

Aufgabe	1	2	3	4	Σ
Max. Punktezahl	10	10	10	10	40
Erreichte Punktezahl					

Hinweise:

1. Schreiben Sie die Lösungen auf Ihr eigenes Blatt Papier.
2. **Nichtprogrammierbare** Taschenrechner sind als Hilfsmittel erlaubt!
3. Als Hilfsmittel ist ein einseitig handbeschriebenes A4 Blatt zugelassen
4. Bearbeitungszeit: **90 min.**
5. Bitte **keinen Bleistift und keinen Rotstift** verwenden!
6. Nach Ablauf der Bearbeitungszeit die beschriebenen Blätter umgehend fotografieren und in der Abgabemöglichkeit über ISIS hochladen.

Technische Universität Berlin Fachgebiet Nachrichtenübertragung Prof. Dr.-Ing. T. Sikora	Klausur im Lehrgebiet Grundlagen der Statistischen Nachrichtentheorie am 06.03.2021	Blatt: 1
--	--	----------

Inhaltsverzeichnis

1	Wahrscheinlichkeit	3
2	Transformation von Zufallsvariablen	6
3	Störreduktion	8
4	Bayessche Entscheidungstheorie	10

<p>Technische Universität Berlin Fachgebiet Nachrichtenübertragung Prof. Dr.-Ing. T. Sikora</p>	<p>Klausur im Lehrgebiet Grundlagen der Statistischen Nachrichtentheorie am 06.03.2021</p>	<p>Blatt: 2</p>
---	--	-----------------

1 Wahrscheinlichkeit

10 Punkte

- 1.1 Erläutere anhand der Kolmogoroff-Axiome welche der folgenden Aussagen stimmen bzw. nicht stimmen. 3 P
- a) $P(\Omega \cup Z) = 0.2$ 1 P
- b) Seien $P(B \cup \bar{Z}) = -0.3$ 1 P
- c) Sei $P(C) = 0.3$, $P(D) = 0.5$ und $P(C \cap D) = 0.2$, dann ist $P(C \cup D) = 0.8$ 1 P

<p>Technische Universität Berlin Fachgebiet Nachrichtenübertragung Prof. Dr.-Ing. T. Sikora</p>	<p>Klausur im Lehrgebiet Grundlagen der Statistischen Nachrichtentheorie am 06.03.2021</p>	<p>Blatt: 3</p>
---	--	-----------------

- 1.2 In einer Schublade seien 8 Socken, zwei davon sind rot, drei grün und drei blau. 4 P
- a) Ziehe zwei Socken ohne Zurücklegen. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit zwei blaue Socken zu ziehen? 1 P
- b) Lege alle Socken wieder zurück und ziehe erneut zwei Mal ohne Zurücklegen. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass keine rote Socke gezogen wurde? 1 P
- c) Lege alle Socken wieder zurück und ziehe nun drei Mal. Ist es Wahrscheinlicher nun von jeder Farbe einen oder genau zwei grüne Socken gezogen zu haben? 2 P

<p>Technische Universität Berlin Fachgebiet Nachrichtenübertragung Prof. Dr.-Ing. T. Sikora</p>	<p>Klausur im Lehrgebiet Grundlagen der Statistischen Nachrichtentheorie am 06.03.2021</p>	<p>Blatt: 4</p>
---	--	-----------------

- 1.3 An einem beliebten Caféstand an einer vielbefahrenen Straße wird Kaffee und Espresso angeboten. Der Kaffee ist beim Publikum beliebter und wird 3 Mal häufiger bestellt als Espresso. Da die Straße sehr laut ist, kann es mit einer Wahrscheinlichkeit von 20% zu Verständnisfehlern kommen, die dazu führen, dass das jeweils andere Produkt ausgegeben wird. 3 P
- a) Skizziere ein Wahrscheinlichkeitsmodell für den Ablauf am Café und gib $P(\text{Kaffeebestellung})$ und $P(\text{Espressobestellung})$ an. 1 P
- b) Gib die Wahrscheinlichkeit $P(\text{Kaffee})$ an, dass ein Kaffee ausgegeben wird. 1 P
- c) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit dass die Bestellung richtig ausgegeben wird? 1 P

<p>Technische Universität Berlin Fachgebiet Nachrichtenübertragung Prof. Dr.-Ing. T. Sikora</p>	<p>Klausur im Lehrgebiet Grundlagen der Statistischen Nachrichtentheorie am 06.03.2021</p>	<p>Blatt: 5</p>
---	--	-----------------

2 Transformation von Zufallsvariablen**10 Punkte**2.1 Die Zufallsvariable X habe die Verteilungsdichtefunktion

6 P

$$p_X(x) = \alpha \ln(|x|) \mathbb{1}_2(t)$$

a) Skizziere $p_X(x)$ für $\alpha = 1$.

2 P

Was muss für α gelten, dass $p_X(x)$ eine gültige VDF sein kann? Begründe!b) Bestimme α .

1.5 P

Hinweis: $\int \ln(x) dx = x \ln(x) - x$

c) Gib die Verteilungsfunktion $F_X(x)$ an.

2.5 P

Hinweis: $\int \ln(-x) dx = x \ln(-x) - x$

Technische Universität Berlin Fachgebiet Nachrichtenübertragung Prof. Dr.-Ing. T. Sikora	Klausur im Lehrgebiet Grundlagen der Statistischen Nachrichtentheorie am 06.03.2021	Blatt: 6
--	--	----------

2.2 Die Verbundverteilungsdichte sei gegeben als: 4 P

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 + y^2, & \text{für } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

a) Gib die Randdichteverteilungen an! 2 P

b) Nun werde X mit $Y = 3X$ transformiert. Berechne die neue Randdichteverteilung $p'_Y(y)$ und den Mittelwert μ_Y 2 P

<p>Technische Universität Berlin Fachgebiet Nachrichtenübertragung Prof. Dr.-Ing. T. Sikora</p>	<p>Klausur im Lehrgebiet Grundlagen der Statistischen Nachrichtentheorie am 06.03.2021</p>	<p>Blatt: 7</p>
---	--	-----------------

3 Störreduktion**10 Punkte**

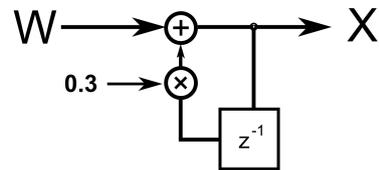
- 3.1 Ein beobachteter Prozess $Y(n) = X(n) + W(n)$ weist additive Rauschüberlagerung auf. Dabei ist das Nachrichtensignal $X(n)$ nicht mit dem Rauschsignal $W(n)$ korreliert. Das Leistungsdichtespektrum des Nachrichtensignals ist mit $S_{XX}(\Omega) = \frac{1}{\beta} \sigma_x^2$ bekannt. Die Rauschreduktion soll mit Hilfe eines WK-Optimalfilter durchgeführt werden, dessen Impulsantwort $h(k)$ wie folgt gegeben ist:

$$h(k) = (1 - \beta)\delta(k)$$

- a) Um welches Signal handelt es sich bei $X(n)$? Begründe! 1 P
- b) Berechne die Übertragungsfunktion des WK-Filters. 1 P
- c) Wie lautet das Leistungsdichtespektrum des Rauschsignals $S_{WW}(\Omega)$ für ein WK-Filter der Indexmenge $I =] - \infty, \infty[$ 2 P
- d) Berechne den $\text{SNR}_{\text{Filter}}$ nach der Filterung mit einem WK-Filter der Indexmenge $I =] - \infty, \infty[$ 3 P
- e) Wieso wird auch unter der Verwendung eines Filter mit der Indexmenge $I =]0, \infty[$ der SNR nicht schlechter? Begründe! 1 P

Technische Universität Berlin Fachgebiet Nachrichtenübertragung Prof. Dr.-Ing. T. Sikora	Klausur im Lehrgebiet Grundlagen der Statistischen Nachrichtentheorie am 06.03.2021	Blatt: 8
---	--	----------

- 3.2 Gegeben sei ein weißer Rauschprozess $\{W\}$ mit Mittelwert $\mu_w = 0$ und Varianz σ_w^2 , sowie folgendes Kanalmodell 2 P



- a) Wie wird ein solches Modell bezeichnet? 1 P
- b) Berechne $R_{XX}(k)$ für $k = 1, 2$ 1 P

<p>Technische Universität Berlin Fachgebiet Nachrichtenübertragung Prof. Dr.-Ing. T. Sikora</p>	<p>Klausur im Lehrgebiet Grundlagen der Statistischen Nachrichtentheorie am 06.03.2021</p>	<p>Blatt: 9</p>
---	--	-----------------

4 Bayessche Entscheidungstheorie

10 Punkte

- 4.1 Bei einer Nachrichtenübertragung werden pro Zeiteinheit jeweils eines von drei Symbolen ω_1, ω_2 und ω_3 übertragen. Auf dem Übertragungsweg wird das Nachrichtensignal $x(t)$ mit additivem weißem Rauschen $r(t)$ gestört. Am Empfänger wird das Signal $y(t) = x(t) + r(t)$ abgetastet und auf eines der drei Symbole ω_1, ω_2 oder ω_3 entschieden. Die drei Symbole treten gleichwahrscheinlich auf. Die Rauschamplituden sind Laplace-verteilt

$$p_r(r) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|r-\mu_r|}$$

mit $\mu_r = E[R] = 0$

- a) Wie groß sind die Auftretenswahrscheinlichkeiten $P(\omega_1), P(\omega_2)$ und $P(\omega_3)$ 1 P
- b) Am Empfänger werden bei fehlerfreier Übertragung nach Abtastung die folgenden Amplituden gemessen: 2 P

$$y(uT) = \begin{cases} -u, & \text{für } \omega_1 \text{ gesendet} \\ 0, & \text{für } \omega_2 \text{ gesendet} \\ u & \text{für } \omega_3 \text{ gesendet} \end{cases}$$

Skizziere die bedingten Wahrscheinlichkeiten $P(y(uT) | \omega_1), P(y(uT) | \omega_2)$ und $P(y(uT) | \omega_3)$ bei rauschüberlagertem Empfang

- c) An welchen Werten liegen die Entscheidungsgrenzen für die Bayessche Klassifikation (Minimum Error Rate). 2 P
- d) Leite die Formel für die mittlere Symbolfehlerwahrscheinlichkeit P_{Symbol} her und berechne anschließend diese Wahrscheinlichkeit 3 P
- e) Wie groß wird P_{Symbol} maximal und von welchen Größen hängt dies ab? Erkläre die Abhängigkeiten unter Berücksichtigung, dass $\sigma_r^2 = \frac{1}{\lambda^2}$ die Varianz des Rauschens ist. 2 P

<p>Technische Universität Berlin</p> <p>Fachgebiet Nachrichtenübertragung</p> <p>Prof. Dr.-Ing. T. Sikora</p>	<p>Klausur im Lehrgebiet</p> <p>Grundlagen der Statistischen Nachrichtentheorie</p> <p>am 06.03.2021</p>	<p>Blatt: 10</p>
---	--	------------------