Klausur im Lehrgebiet

Grundlagen der Statistischen Nachrichtentheorie

- Prof. Dr.-Ing. Thomas Sikora -

Name: .... Vorname: ....

Matr.Nr:...........................

Ich bin mit der Veröffentlichung des Klausurergebnisses
unter meiner verkürzten Matrikelnummer einverstanden: ☐ Ja

Aufgabe	1	2	3	4	$\sum$
Max. Punktezahl	10	10	10	10	40
Erreichte Punktezahl					

Hinweise:

1. Schreiben Sie die Lösungen auf Ihr eigenes Blatt Papier.
2. **Nichtprogrammierbare** Taschenrechner sind als Hilfsmittel erlaubt!
3. Als Hilfsmittel ist ein einseitig handbeschriebenes A4 Blatt zugelassen
4. Bearbeitungszeit: **90 min**.
5. Bitte **keinen Bleistift und keinen Rotstift** verwenden!
6. Nach Ablauf der Bearbeitungzeit die beschriebenen Blätter umgehend fotografieren und in der Abgabemöglichkeit über ISIS hochladen.

Inhaltsverzeichnis

1 Wahrscheinlichkeit 10 Punkte

1.1 Erläutere anhand der Kolmogoroff-Axiome welche der folgenden Aussagen stimmen bzw. nicht stimmen. 3 P

a) Sei $P(A \cap B) = \emptyset$,$P(A) = 0.3$ und $P(B) = 0.7$, dann ist $P(A \cup B) = 0.4$ 1 P

b) $P(C) + P(\overline{C}) = 0.9$ 1 P

c) Sei $P(D) + P(E) = 0.8$, $P(D \cap E) = \emptyset$ und $P(B) = 0.9$, so gibt es ein gültiges $P(E)$. 1 P

1.2	Ein Memory Spiel enthält 12 Karten. Davon zeigen 2 ein Kreuz, 4 einen Kreis und 6 einen Stern. Die Karten werden verdeckt auf einen Tisch gelegt und gemischt, sodass nicht bekannt ist, welches Symbol auf der unteren Seite der Karte abgebildet ist.	4 P
a)	Es werden gleichzeitig zwei beliebige Karten aufgedeckt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, das zweimal ein Kreis zu sehen ist?	1 P
b)	Es sind wieder alle Karten verdeckt und gemischt auf dem Tisch verteilt. Es werden nacheinander zwei Karten umgedreht. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass zwei **nicht** gleiche Symbole zu sehen sind?	2 P
c)	Es sind wieder alle Karten verdeckt und gemischt auf dem Tisch verteilt. Es werden drei Karten nacheinander aufgedeckt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die dritte aufgedeckte Karte keine Ecken hat?	1 P

1.3 In zwei Schubladen werden Socken gelagert. In der ersten Schublade sind acht von zehn Socken rot und der Rest weiß, in der zweiten Schublade sind drei von zehn Socken rot und der Rest weiß. 3 P

a) Es wird nun zufällig aus einer der beiden Schubladen eine rote Socke gezogen. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass diese aus der zweiten Schublade stammt? 2 P

b) Wie oft müsste man maximal aus der zweiten Schublade ziehen, um ein weißes Sockenpaar zu erhalten? 1 P

2 Stochastische Prozesse und Verteilungsfunktion — 10 Punkte

2.1	Gegeben seien zwei stationäre Prozesse $\{X(n)\}$ und $\{Y(n)\}$.	5 P
a)	Leite die AKF $R_{ZZ}(k)$ der Summe $Z(n) = X(n) + Y(n)$ her.	2 P
b)	Was gilt, wenn die Prozesse orthogonal sind und wie sieht die Autokorrelationsfunktion dann aus?	1 P
c)	Was würde sich für die Autokorrelation bei $Z(n) = X(n) - Y(n)$ mit und ohne Orthogonalitätsannahme ergeben?	1 P
d)	Leite den Zusammenhang des Leistungsdichtespektrums von Z zu den Leistungsdichtespektren von X und Y her. Es gelte die Beziehung aus Aufgabenteil c) mit Annahme von Orthogonalität.	1 P

2.2 Die Verbundverteilungsdichte sei gegeben als: 5 P

$$f(x, y) = \begin{cases} 2x^2 + y^2, & \text{für } 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

a) Gib die Randdichteverteilungen an und skizziere diese! 2 P

b) Sind X und Y statistisch unabhängig? Begründe! 1 P

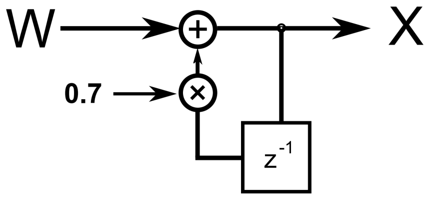
c) Nun werde X mit $Y = 2X$ transformiert. Berechne die neue Randdichteverteilung $p'_Y(y)$ und den Mittelwert μ_Y 2 P

3 Störreduktion 10 Punkte

3.1 Ein diskreter Prozess habe folgende normierte Autokorrelationsfolge: $\rho_{xx}[n] = \{1, 0.6, 0.4, 0.01, ...\}$. Berechne die Filterkoeffizienten des optimalen Prädiktionsfilters zweiter Ordnung nach dem Wiener-Hopf-Ansatz! 3 P

Hinweis: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

3.2 Gegeben sei ein weißer Rauschprozess {W} mit Mittelwert $\mu_w = 0$ und Varianz σ_w^2, sowie folgendes Kanalmodell 2 P



a) Wie wird ein solches Modell bezeichnet? 1 P

b) Berechne $R_{XX}(k)$ für $k = 1, 2$ 1 P

3.3 Ein beobachteter Prozess $Y(n) = X(n) + N(n)$ weist additive Rauschüberlagerung auf. Dabei ist das Nachrichtensignal $X(n)$ nicht mit dem Rauschsignal $N(n)$ korreliert. Die Rauschreduktion soll mit Hilfe eines WK-Optimalfilter durchgeführt werden, dessen Übertragungsfunktion $H(j\Omega)$ wie folgt gegeben ist: 5 P

$$H(j\Omega) = \frac{S_{YX}(j\Omega)}{S_{YY}(j\Omega)}$$

a) Leite $S_{YX}(j\Omega)$ und $S_{YY}(j\Omega)$ unter Verwendung der Wiener-Kintchine-Beziehung her. 2 P

b) Gegeben sei nun die folgende Impulsantwort des Filters: 3 P

$$h(n) = (1 - \alpha)\delta(n)$$

Skizziere die Impulsantwort und berechne S_{NN} unter der Annahme, dass es sich beim Eingangssignal $X(n)$ um weißes Rauschen mit dem Leistungsdichtespektrum $S_{XX} = \alpha\sigma_x^2$ handelt.

4 Bayessche Entscheidungstheorie 10 Punkte

4.1 Für eine "Wetterprognose"wird zunächst entschieden, in welchem Zustand $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ oder ω_4 sich das Wetter befindet. 10 P

Hierzu wird täglich ein Wert α gemessen. Alle vier Zustände treten gleichwahrscheinlich auf. Die Werte von α sind Laplace-verteilt

$$p_\alpha(\alpha) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|\alpha - \mu_\alpha|}$$

a) Wie groß sind die Auftretenswahrscheinlichkeiten $P(\omega_1), P(\omega_2), P(\omega_3)$ und $P(\omega_4)$? 1 P

b) Für die Mittelwerte μ_α werden folgende Werte angenommen: 2 P

$$\mu_\alpha(\alpha) = \begin{cases} -1.5K, & \text{für } \omega_1 \\ -0.5K, & \text{für } \omega_2 \\ 0.5K & \text{für } \omega_3 \\ 1.5K & \text{für } \omega_4 \end{cases}$$

Skizziere die bedingten Wahrscheinlichkeiten $P(\alpha \mid \omega_1), P(\alpha \mid \omega_2), P(\alpha \mid \omega_3)$ und $P(\alpha \mid \omega_4)$ bei rauschüberlagertem Empfang

c) An welchen Werten liegen die Entscheidungsgrenzen für die Bayessche Klassifikation (Minimum Error Rate). 2 P

d) Leite die Formel für die mittlere Fehlerwahrscheinlichkeit P_E her und berechne anschließend diese Wahrscheinlichkeit 3 P

e) Wie groß wird P_E maximal und von welchen Größen hängt dies ab? Erkläre die Abhängigkeiten unter Berücksichtigung, dass $\sigma_\alpha^2 = \frac{1}{\lambda^2}$ die Varianz des Rauschens ist. 2 P