

Grundlagen der Statistischen Nachrichtentheorie

- Prof. Dr.-Ing. Thomas Sikora -

Name:

Vorname:

Matr.Nr:

Ich bin mit der Veröffentlichung des Klausurergebnisses
unter meiner Matrikelnummer einverstanden: Ja

Aufgabe	1	2	3	4	-	Σ
Max. Punktezahl	11	10	10	10	-	41
Erreichte Punktezahl					-	

Hinweise:

1. Schreiben Sie die Lösungen jeweils direkt auf den freien Platz unterhalb der Aufgabenstellung.
2. Die **Rückseiten** können bei Bedarf zusätzlich beschrieben werden. Nummerierungen in diesem Fall nicht vergessen.
3. Sollte auch der Platz auf der Rückseite nicht ausreichen, bitte **kein eigenes Papier verwenden**. Die Klausuraufsicht teilt auf Anfrage **zusätzlich leere Blätter** aus.
4. **Nichtprogrammierbare** Taschenrechner sind als Hilfsmittel erlaubt!
5. Es ist ein einseitig beschriebenes DIN A4-Blatt zur Lösung dieser Klausur zugelassen!
6. Bearbeitungszeit: **90 min**.
7. Bitte **keinen Bleistift und keinen Rotstift** verwenden!

Technische Universität Berlin Fachgebiet Nachrichtenübertragung Prof. Dr.-Ing. T. Sikora	Klausur im Lehrgebiet Statistische Nachrichtentheorie am 27.09.2012	Blatt: 1
--	--	----------

Inhaltsverzeichnis

1	Wahrscheinlichkeit und Zufallsvariablen	3
2	Verteilungsfunktion	7
3	Störreduktion	10
4	Lineare Prädiktion	12

1 Wahrscheinlichkeit und Zufallsvariablen

11 Punkte

1.1 Geben Sie die drei Kolmogoroff-Axiome in Gleichungsform an und erklären Sie diese in Worten. 3 P

1.2 Ein Kasten enthält zwei weiße und drei rote Bälle. Zwei Bälle werden gezogen, der erste Ball wird nicht zurückgelegt. 3 P

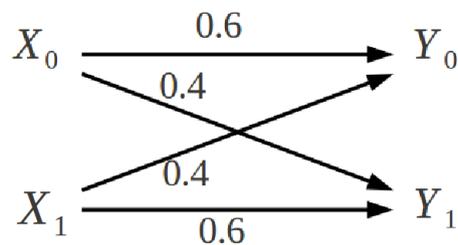
a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, die beiden weißen Bälle zu ziehen? 1 P

<p>Technische Universität Berlin Fachgebiet Nachrichtenübertragung Prof. Dr.-Ing. T. Sikora</p>	<p>Klausur im Lehrgebiet Statistische Nachrichtentheorie am 27.09.2012</p>	<p>Blatt: 3</p>
---	--	-----------------

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, wenn man den ersten Ball zurücklegen würde? 1 P

c) Wann gilt die statistische Unabhängigkeit? 1 P

1.3 Gegeben sei ein binärer symmetrischer Kanal wie unten abgebildet. Sendesymbole seien X_0 und X_1 , mit Auftretenswahrscheinlichkeiten $P(X_0) = 0.8$ und $P(X_1) = 0.2$ 2 P



Technische Universität Berlin Fachgebiet Nachrichtenübertragung Prof. Dr.-Ing. T. Sikora	Klausur im Lehrgebiet Statistische Nachrichtentheorie am 27.09.2012	Blatt: 4
--	---	----------

a) Geben Sie die Wahrscheinlichkeit an, dass das Symbol Y_0 empfangen wird. 1 P

b) Geben Sie die Wahrscheinlichkeit an, dass ein Sendesymbol richtig ankommt. 1 P

Technische Universität Berlin Fachgebiet Nachrichtenübertragung Prof. Dr.-Ing. T. Sikora	Klausur im Lehrgebiet Statistische Nachrichtentheorie am 27.09.2012	Blatt: 5
---	--	----------

- 1.4 In einer Schachtel liegen 100 Widerstände. Ihre Werte sind 20, 100 und 47 Ω , ihre Toleranzen sind 5% und 10%. Die Verteilung ist gegeben durch: 3 P

R/ Ω	5%	10%
20	10	15
100	25	15
47	5	30

Folgende Ereignisse sind definiert:

A = Ein 20 Ω Widerstand wird gezogen.

B = Ein Widerstand mit 10% Toleranz wird gezogen.

C = Ein 47 Ω Widerstand wird gezogen.

Berechnen Sie: $P(C)$, $P(B)$, $P(A \cap B)$, $P(A \cap C)$, $P(A \cup C)$, $P(A|B)$.

2 Verteilungsfunktion**10 Punkte**

- 2.1 Bei einem verfälschten Würfel besitzt die Zufallsvariable X der Augenzahlen folgende Verteilung: 6 P

Augenzahl x_n	1	2	3	4	5	6
$P(X = x_n)$	0.1	0.25	0.15	0.1	0.1	0.3

- a) Tragen Sie die Einzelwahrscheinlichkeiten über den Augenzahlen auf. 1 P

- b) Skizzieren Sie die Verteilungsfunktion von X . 1 P

Technische Universität Berlin Fachgebiet Nachrichtenübertragung Prof. Dr.-Ing. T. Sikora	Klausur im Lehrgebiet Statistische Nachrichtentheorie am 27.09.2012	Blatt: 7
---	--	----------

c) Berechnen Sie den Mittelwert und die Varianz von X .

4 P

Technische Universität Berlin Fachgebiet Nachrichtenübertragung Prof. Dr.-Ing. T. Sikora	Klausur im Lehrgebiet Statistische Nachrichtentheorie am 27.09.2012	Blatt: 8
---	--	----------

2.2 Eine Zufallsvariable X habe die VDF $p_X(x) = e^{-b|x|}$. 4 P

a) Skizziere die VDF und gib die Verteilungsfunktion an! 2 P

b) Wie groß muss b sein und wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass X im Bereich zwischen 1 und 2 liegt? 2 P

Technische Universität Berlin Fachgebiet Nachrichtenübertragung Prof. Dr.-Ing. T. Sikora	Klausur im Lehrgebiet Statistische Nachrichtentheorie am 27.09.2012	Blatt: 9
---	--	----------

3 Störreduktion

10 Punkte

3.1 Gegeben sei ein MA-Prozess erster Ordnung: $X(n) = w(n) + w(n - 1)$. 6 P

a) Leiten Sie die Werte der normierten AKF $\rho_{XX}(k)$ für $k = 0, 1$ her! 3 P

b) Geben Sie die Übertragungsfunktion des Filters an, das den Prozess aus weißem Rauschen $W(n)$ erzeugt! Bestimmen Sie das inverse Filter und prüfen Sie ob das Filter stabil ist! 3 P

<p>Technische Universität Berlin Fachgebiet Nachrichtenübertragung Prof. Dr.-Ing. T. Sikora</p>	<p>Klausur im Lehrgebiet Statistische Nachrichtentheorie am 27.09.2012</p>	<p>Blatt: 10</p>
---	--	------------------

3.2 Gegeben sei ein rauschgestörtes Signal $Y(n) = X(n) + N(n)$, wobei das Nachrichtensignal $X(n)$ und das Rauschsignal $N(n)$ ein Leistungsdichtespektrum $S_{XX}(\Omega) = \sigma_X^2$ bzw. $S_{NN}(\Omega) = \sigma_N^2 = \alpha \sigma_X^2$ besitzen. 4 P

a) Berechnen Sie die Übertragungsfunktion und die Impulsantwort des optimalen nicht-kausalen WK-Filters mit Indexmenge von $\{-\infty; +\infty\}$! 2 P

b) Berechnen Sie das SNR ohne Filterung bzw. bei optimaler Filterung! $(\min\{\sigma_R^2\} = \sigma_X^2 - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{S_{XX}(\Omega) \cdot S_{XX}(\Omega)}{S_{XX}(\Omega) + S_{NN}(\Omega)} d\Omega)$ 2 P

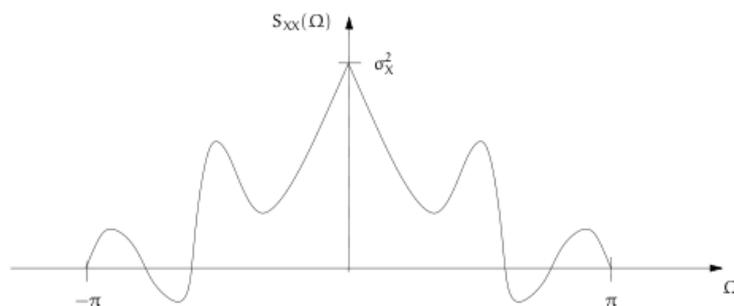
Technische Universität Berlin Fachgebiet Nachrichtenübertragung Prof. Dr.-Ing. T. Sikora	Klausur im Lehrgebiet Statistische Nachrichtentheorie am 27.09.2012	Blatt: 11
---	--	-----------

4 Lineare Prädiktion

10 Punkte

4.1 Zeichnen Sie die Autokorrelationsfunktion $R_{DD}(k)$ des Prädiktionsfehlers d bei optimal eingestelltem Prädiktor mit $N \rightarrow \infty$ 1 P

4.2 Das abgebildete LDS ist Ergebnis einer autoregressiven Schätzung eines mittelwertfreien Prozesses. Was ist an diesem LDS fehlerhaft? 1 P



Technische Universität Berlin Fachgebiet Nachrichtenübertragung Prof. Dr.-Ing. T. Sikora	Klausur im Lehrgebiet Statistische Nachrichtentheorie am 27.09.2012	Blatt: 12
--	---	-----------

- 4.3 Wiener-Hopf-Gleichung. Gegeben ist eine stationäre mittelwertfreie Nachrichtenquelle $X(n)$. 8 P
- a) Geben Sie die Wiener-Hopf-Gleichung für die lineare Prädiktion in Matrixschreibweise an. 1 P
- b) Leiten Sie die Leistung des Schätzfehlers $d(n) = x(n) - z(n)$ bei optimaler Prädiktion der Ordnung N her und drücken Sie diese als Funktion der Autokorrelationsmatrix (Matrixschreibweise!) aus. Hinweis: Denken Sie an das Orthogonalitätsprinzip! 3 P
- c) Ein diskretes Signal habe folgende Autokorrelationsfolge: $r_{xx}[n] = \{1, 0.5, 0.4, 0.3, \dots\}$. Berechnen Sie die Filterkoeffizienten des optimalen Prädiktionsfilters **1.)** erster Ordnung und **2.)** zweiter Ordnung nach dem Wiener-Hopf-Ansatz! 4 P

Technische Universität Berlin Fachgebiet Nachrichtenübertragung Prof. Dr.-Ing. T. Sikora	Klausur im Lehrgebiet Statistische Nachrichtentheorie am 27.09.2012	Blatt: 13
--	---	-----------