

# Grundlagen der Statistischen Nachrichtentheorie

- Prof. Dr.-Ing. Thomas Sikora -

Name: .....

Vorname: .....

Matr.Nr: .....

Ich bin mit der Veröffentlichung des Klausurergebnisses  
unter meiner Matrikelnummer einverstanden:  Ja

Aufgabe	1	2	3	4	$\Sigma$
Max. Punktezahl	10	10	10	10	40
Erreichte Punktezahl					

## Hinweise:

1. Schreiben Sie die Lösungen jeweils direkt auf den freien Platz unterhalb der Aufgabenstellung.
2. Die **Rückseiten** können bei Bedarf zusätzlich beschrieben werden. Nummerierungen in diesem Fall nicht vergessen.
3. Sollte auch der Platz auf der Rückseite nicht ausreichen, bitte **kein eigenes Papier verwenden**. Die Klausuraufsicht teilt auf Anfrage **zusätzlich leere Blätter** aus.
4. **Nichtprogrammierbare** Taschenrechner sind als Hilfsmittel erlaubt!
5. Es ist ein einseitig beschriebenes DIN A4-Blatt zur Lösung dieser Klausur zugelassen!
6. Bearbeitungszeit: **90 min**.
7. Bitte **keinen Bleistift und keinen Rotstift** verwenden!

Technische Universität Berlin Fachgebiet Nachrichtenübertragung Prof. Dr.-Ing. T. Sikora	Klausur im Lehrgebiet <b>Grundlagen der Statistischen Nachrichtentheorie</b> am 31.07.2013	Blatt: 1
--	--	----------

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Wahrscheinlichkeit und Zufallsvariablen</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Verteilungsfunktion</b>	<b>6</b>
<b>3</b>	<b>Lineare Systeme</b>	<b>9</b>
<b>4</b>	<b>Wiener-Kolmogoroff-Filterung</b>	<b>12</b>

<b>Technische Universität Berlin</b> Fachgebiet Nachrichtenübertragung Prof. Dr.-Ing. T. Sikora	Klausur im Lehrgebiet <b>Grundlagen der Statistischen Nachrichtentheorie</b> am 31.07.2013	Blatt: 2
---	--	----------

## 1 Wahrscheinlichkeit und Zufallsvariablen

10 Punkte

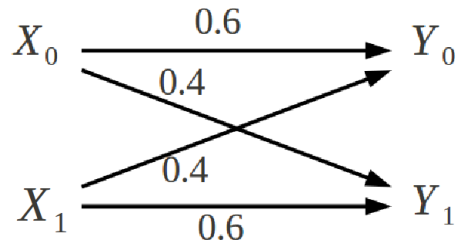
- 1.1 Erläutere anhand der Kolmogoroff-Axiome welche der folgenden Aussagen stimmen bzw. nicht stimmen. 4 P
- a)  $P(B \cup C) = -0,1$  1 P
- b)  $P(\Omega \cup C) = 0,1$  1 P
- c)  $P(E \cup E) = P(E) + P(E)$  1 P
- d)  $P(\bar{\Omega}) = 0$  1 P

<p>Technische Universität Berlin Fachgebiet Nachrichtenübertragung Prof. Dr.-Ing. T. Sikora</p>	<p>Klausur im Lehrgebiet Grundlagen der Statistischen Nachrichtentheorie am 31.07.2013</p>	<p>Blatt: 3</p>
---	--	-----------------

- 1.2 Ein Kasten enthält drei weiße und zwei rote Bälle. Zwei Bälle werden gezogen, der erste Ball wird nicht zurückgelegt. 4 P
- a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, zwei weiße Bälle zu ziehen? 1 P
- b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, wenn man den ersten Ball zurücklegen würde? 1 P
- c) Was ist wahrscheinlicher: nach zweimaligen Ziehen ohne zurücklegen eine rote und eine weiße Kugel zu erhalten oder zwei rote Kugeln? 2 P

<p>Technische Universität Berlin Fachgebiet Nachrichtenübertragung Prof. Dr.-Ing. T. Sikora</p>	<p>Klausur im Lehrgebiet Grundlagen der Statistischen Nachrichtentheorie am 31.07.2013</p>	<p>Blatt: 4</p>
---	--	-----------------

- 1.3 Gegeben sei ein binärer symmetrischer Kanal wie unten abgebildet. Sendesymbole seien  $X_0$  und  $X_1$ , mit Auftretenswahrscheinlichkeiten  $P(X_0) = 0,7$  und  $P(X_1) = 0,3$  2 P



- a) Geben Sie die Wahrscheinlichkeit an, dass das Symbol  $Y_0$  empfangen wird. 1 P
- b) Geben Sie die Wahrscheinlichkeit an, dass ein Sendesymbol richtig ankommt. 1 P

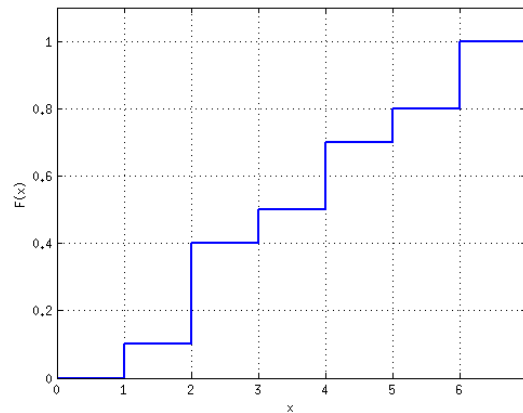
<b>Technische Universität Berlin</b> Fachgebiet Nachrichtenübertragung Prof. Dr.-Ing. T. Sikora	Klausur im Lehrgebiet <b>Grundlagen der Statistischen Nachrichtentheorie</b> am 31.07.2013	Blatt: 5
---	--	----------

## 2 Verteilungsfunktion

**10 Punkte**

2.1 Gegeben sei folgende Verteilungsfunktion eines Würfels:

6 P



a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass es sich um einen fairen Würfel handelt? Begründe. 1 P

b) Welcher Wert wird im Mittel am häufigsten gewürfelt? 1 P

<b>Technische Universität Berlin</b> Fachgebiet Nachrichtenübertragung Prof. Dr.-Ing. T. Sikora	Klausur im Lehrgebiet <b>Grundlagen der Statistischen Nachrichtentheorie</b> am 31.07.2013	Blatt: 6
---	--	----------

c) Berechnen Sie den Mittelwert und das 2. zentrale Moment.

4 P

<p><b>Technische Universität Berlin</b> Fachgebiet Nachrichtenübertragung  Prof. Dr.-Ing. T. Sikora</p>	<p>Klausur im Lehrgebiet <b>Grundlagen der Statistischen Nachrichtentheorie</b>  am 31.07.2013</p>	<p>Blatt: 7</p>
---	--	-----------------

2.2 Eine Zufallsvariable  $X$  habe die VDF  $p_X(x) = e^{-b|x|}$ . 4 P

a) Skizziere die VDF und gib die Verteilungsfunktion an! 2 P

b) Wie groß muss  $b$  sein und wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass  $X$  im Bereich zwischen 1 und 2 liegt? 2 P

<p>Technische Universität Berlin Fachgebiet Nachrichtenübertragung Prof. Dr.-Ing. T. Sikora</p>	<p>Klausur im Lehrgebiet Grundlagen der Statistischen Nachrichtentheorie am 31.07.2013</p>	<p>Blatt: 8</p>
---	--	-----------------



**3 Lineare Systeme****10 Punkte**

- 3.1 Gegeben sei ein lineares System mit der Impulsantwort  $h(n)$ . 6 P
- a) Zeigen Sie, dass sich die Kreuzkorrelierte zwischen Eingang und Ausgang zu  $R_{XY}(k) = R_{XX}(k) * h(k)$  ergibt. Wie kann man damit die Impulsantwort des linearen Systems messen? 4 P
- b) Wie verändert sich das Leistungsdichtespektrum des Eingangssignals durch die Übertragung? 1 P
- c) Sei weißes Rauschen das Eingangssignal. Wie sieht das Leistungsdichtespektrum des Ausgangssignals aus, wenn das lineare Filter ein idealer Tiefpass mit der Grenzfrequenz  $\omega_G$  ist? 1 P

<b>Technische Universität Berlin</b> Fachgebiet Nachrichtenübertragung Prof. Dr.-Ing. T. Sikora	Klausur im Lehrgebiet <b>Grundlagen der Statistischen Nachrichtentheorie</b> am 31.07.2013	Blatt: 9
---	--	----------

- 3.2 Gegeben sei ein rauschgestörtes Signal  $Y(n) = X(n) + N(n)$ , wobei das Nachrichtensignal  $X(n)$  und das Rauschsignal  $N(n)$  ein Leistungsdichtespektrum  $S_{XX}(\Omega) = \sigma_X^2$  bzw.  $S_{NN}(\Omega) = \sigma_N^2 = \alpha \sigma_X^2$  besitzen. Das Rauschsignal ist nicht mit dem Nachrichtensignal korreliert. 4 P
- a) Berechnen Sie die Übertragungsfunktion und die Impulsantwort des optimalen nicht-kausalen WK-Filters mit Indexmenge von  $\{-\infty; +\infty\}$ ! 2 P

<b>Technische Universität Berlin</b> Fachgebiet Nachrichtenübertragung Prof. Dr.-Ing. T. Sikora	Klausur im Lehrgebiet <b>Grundlagen der Statistischen Nachrichtentheorie</b> am 31.07.2013	Blatt: 10
---	--	-----------

- b) Berechnen Sie das SNR ohne Filterung bzw. bei optimaler Filterung! (min $\{\sigma_R^2\} = \sigma_X^2 - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{S_{XX}(\Omega) \cdot S_{XX}(\Omega)}{S_{XX}(\Omega) + S_{NN}(\Omega)} d\Omega$ ) 2 P

<b>Technische Universität Berlin</b> Fachgebiet Nachrichtenübertragung Prof. Dr.-Ing. T. Sikora	Klausur im Lehrgebiet <b>Grundlagen der Statistischen Nachrichtentheorie</b> am 31.07.2013	Blatt: 11
---	--	-----------

**4 Wiener-Kolmogoroff-Filterung****10 Punkte**

- 4.1 Nennen Sie die drei Einsatzbereiche des WK-Filters und beschreiben Sie die zugehörigen Kanaleigenschaften. 3 P
- 4.2 Wiener-Hopf-Gleichung. Gegeben ist eine stationäre mittelwertfreie Nachrichtenquelle  $X(n)$ . 7 P
- a) Geben Sie die Wiener-Hopf-Gleichung für die lineare Prädiktion in Matrixschreibweise an. 1 P
- b) Leiten Sie die Leistung des Schätzfehlers  $d(n) = x(n) - z(n)$  bei optimaler Prädiktion der Ordnung  $N$  her und drücken Sie diese als Funktion der Autokorrelationsmatrix (Matrixschreibweise!) aus. Hinweis: Denken Sie an das Orthogonalitätsprinzip! 3 P

<b>Technische Universität Berlin</b> Fachgebiet Nachrichtenübertragung Prof. Dr.-Ing. T. Sikora	Klausur im Lehrgebiet <b>Grundlagen der Statistischen Nachrichtentheorie</b> am 31.07.2013	Blatt: 12
---	--	-----------

- c) Ein diskretes Signal habe folgende Autokorrelationsfolge:  $r_{xx}[n] = \{1.1, 0.3, 0.8, 0.04, \dots\}$ . Berechnen Sie die Filterkoeffizienten des optimalen Prädiktionsfilters zweiter Ordnung nach dem Wiener-Hopf-Ansatz! 3 P

*Hinweis:*  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

<b>Technische Universität Berlin</b> Fachgebiet Nachrichtenübertragung Prof. Dr.-Ing. T. Sikora	Klausur im Lehrgebiet <b>Grundlagen der Statistischen Nachrichtentheorie</b> am 31.07.2013	Blatt: 13
---	--	-----------