Musterlösung Aprilklausur ITPDGL

Verständnisteil

V1

Aufgabe

f heißt von exponentieller Ordnung, wenn es Konstanten C und γ gibt, so daß für alle $t \geq 0$ gilt:

$$|f(t)| \leq C e^{\gamma t}.$$

a) $f_1(t) = e^{2t^2}$

Angenommen es ex C, γ mit $|e^{2t^2}| \leq C e^{\gamma t}$, $t \geq 0$

$\Rightarrow e^{2t^2 - \gamma t} \leq C \rightarrow \underline{e^{t(2t-\gamma)}} \leq C$ ↯

z.B. für $t \geq \max(\gamma+1, C)$ ist die Ungleichung nicht erfüllt. f_1 ist nicht von exponentieller Ordnung!

b) $f_2(t) = t^2 e^{-t^2}$, f_2 ist von exponentieller Ordnung

Wähle z.B. $\gamma = 0$ und $C = \frac{1}{e}$

$|t^2 e^{-t^2}| \leq \frac{1}{e} e^{0t} = \frac{1}{e}$, f_2 hat in $t=0$ ein globales Minimum und in $t = \pm 1$ ein lokales Maximum $f_2(\pm 1) = \frac{1}{e}$.

c) $f_3(t) = \frac{t^2}{2} e^{2t}$, f_3 ist von exponentieller Ordnung.

z.B. $\gamma = 3$, $C = 1$ $\quad \left|\frac{t^2}{2} e^{2t}\right| \leq e^{3t}$, $t \geq 0$.

$\left(\underline{\underline{\frac{t^2}{2}}} \leq e^t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} = 1 + t + \underline{\underline{\frac{t^2}{2}}} + \dots \right)$

Verständnisteil (V2)

2. Aufgabe Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine Schwartz-Funktion.

Dann ex. $\mathcal{F}[f(t)](\omega) = F(\omega)$, $\omega \in \mathbb{C}$ und es gilt:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Eulerformel}}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) (\cos(\omega t) - i \sin(\omega t)) dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{f(t) \cos(\omega t)}_{\text{gerade Fkt.}} - i \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{f(t) \sin(\omega t)}_{\text{ungerade Fkt.}} dt = 2 \int_0^{\infty} f(t) \cos(\omega t) dt + 0.$$

F ist weiter eine gerade Funktion. Für $\omega \in \mathbb{C}$ gilt

$$F(-\omega) = 2 \int_0^{\infty} f(t) \cos(-\omega t) dt \underset{\substack{\uparrow \\ \cos(\omega t) \text{ ist gerade Fkt}}}{=} 2 \int_0^{\infty} f(t) \cos(\omega t) dt = F(\omega)$$

3. Aufgabe

Sei $y_n = \begin{cases} a_n & 0 \le n \le n_0 \\ 0 & n > n_0 \end{cases}$, $n_0 \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{Z}[y_n](z) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n \frac{1}{z^n} = \sum_{n=0}^{n_0} a_n \frac{1}{z^n} = a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots + \frac{a_{n_0}}{z^{n_0}}$$

Die endliche Summe konvergiert in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$!

4 Aufgabe Sei $f: [0, \infty[\to \mathbb{R}$ eine stückw. stetig Fkt von exp Ordnung.

4a) $\Rightarrow$ Die Laplacetransformierte $\mathcal{L}[f(t)](s)$ ex. für $Re(s) \ge \gamma \in \mathbb{R}$. (ein solches $\gamma \in \mathbb{R}$ muß ex.)

Verständnisteil

4. Aufgabe

$t\,f(t)$ ist ebenfalls von exponentieller Ordnung und

$\mathcal{L}[t\,f(t)](s)$ ex. für $Re(s) \geq \gamma + 1 =: \gamma_0$

$$\mathcal{L}[t\,f(t)](s) = \int_0^\infty t\,f(t)\,e^{-st}\,dt$$

$$= -\int_0^\infty f(t)\,\frac{d}{ds}\,e^{-st}\,dt = -\frac{d}{ds}\int_0^\infty f(t)\,e^{-st}\,dt$$

$$= -\frac{d}{ds}\,\mathcal{L}[f(t)](s)$$

4b) ?? $\mathcal{L}[t](s) = \frac{1}{s^2}$, Wähle $f(t) \equiv 1$

Damit ist f von exponentieller Ordnung ($\gamma = 0$)

$$\mathcal{L}[t](s) = \mathcal{L}[t \cdot 1](s) = \mathcal{L}[t\,f(t)](s) =$$

$$-\frac{d}{ds}\,\mathcal{L}[f(t)](s) = -\frac{d}{ds}\,\mathcal{L}[1](s) = -\frac{d}{ds}\,\frac{1}{s} = \frac{1}{s^2}$$

5. Aufgabe

$y'' + y' = 1$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

$y_1(x) = x$, $y_1(0) = 0$ ✓, $y_1'(x) = 1$, $y_1'(0) = 1$ ✓

$y_1'' + y_1' = 0 + 1 = 1$ ✓ $y_1(t) = x$ löst das AWP

Verständnisteil

V4 //

5. Aufgabe

$\varphi_2(x) = \sin(x)$ $\qquad \varphi_2(0) = 0$ ✓ $\qquad \varphi_2'(x) = \cos(x)$

$\varphi_2'(0) = 1$ ✓

$\varphi_2'' + \varphi_2' = -\sin(x) + \cos(x) \stackrel{!}{=} 1$ ↯

$\varphi_2(x) = \sin(x)$ erfüllt die Anfangswerte, aber löst nicht die DGL.

6. Aufgabe $\qquad u_{xx} + u_{yy} = 0$

Der additive Trennungsansatz $u(x,y) = \underline{X}(x) + \underline{Y}(y)$ ergibt

$$\underline{X}''(x) + \underline{Y}''(y) = 0 \iff \underline{X}''(x) = -\underline{Y}''(y) = \lambda \in \mathbb{R}$$

$\underline{X}''(x) = \lambda \Rightarrow \underline{X}(x) = \frac{\lambda}{2}x^2 + bx + c \quad , \; b, c \in \mathbb{R}$

$\underline{Y}''(y) = -\lambda \Rightarrow \underline{Y}''(y) = \frac{-\lambda}{2}y^2 + \tilde{b}y + \tilde{c} \quad , \; \tilde{b}, \tilde{c} \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow u(x,y) = \frac{\lambda}{2}(x^2 - y^2) + bx + \tilde{b}y + c + \tilde{c}$ //