Rechenteil Musterlsg. ITPDG
SS 02 Juli Klausur

1. Aufgabe

Lösen Sie mit Hilfe der Laplacetransformation das folgende DGL-System

$$\vec{y}\,' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{y} \qquad \vec{y}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$s\,L[\vec{y}](s) - \vec{y}(0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} L[\vec{y}](s)$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1-s & 2 \\ 0 & 1-s \end{pmatrix} L[\vec{y}](s) = -\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Cramersche-Regel für $s \neq 1$

$$L[\vec{y}](s) = \frac{1}{(1-s)^2} \begin{pmatrix} -(1-s)-2 \\ -(1-s) \end{pmatrix} = +\begin{pmatrix} \frac{1}{s-1} - \frac{2}{(1-s)^2} \\ \frac{1}{s-1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{s-1} - \frac{2}{(s-1)^2} \\ \frac{1}{s-1} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{y}(t) = \begin{pmatrix} e^t(1+2t) \\ e^t \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} e^t(1+2t) \\ e^t \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} 1+2t \\ 1 \end{pmatrix}$$

Rechenteil

2. Aufgabe

Berechnen Sie mit Hilfe der $\mathcal{Z}$-Transformation die Lösung der Differenzengleichung

$$u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n = 0 \;, \quad u_0 = 1 \,, \; u_1 = 3 \,.$$

Lösung:

$$(z^2 - 2z + 1)\, Z[u_n](z) - z^2 u_0 - z u_1 + 2 z u_0 = 0$$

$$\Rightarrow \quad Z[u_n](z) = \frac{(3-2)z + z^2}{z^2 - 2z + 1} = \frac{z^2 + z}{(z-1)^2}$$

$$z = \frac{1}{w} \qquad G(w) = \frac{1+w}{(1-w)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n w^{n-1} + w \sum_{n=1}^{\infty} n w^{n-1}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)\, w^n$$

d.h. $$Z[u_n](z) = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \frac{1}{z^n}$$

$$\Rightarrow \quad u_n = 2n+1 \quad \text{für } n = 0, 1, 2, \dots$$

Oder

$$Z[u_n](z) = z \cdot \frac{z+1}{(z-1)^2} = z\left(\frac{1}{z-1} + \frac{2}{(z-1)^2}\right)$$

$$= Z[1^n](z) + 2\, Z[n \cdot 1^n](z)$$

$$= Z[1 + 2n](z)$$

Rechenteil

3. Aufgabe

Gegeben ist die partielle Differentialgleichung

$$u_t = u_{xx} - u$$

mit dem Anfangswert $u(x,0) = e^{-|x|}$, $x \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie bezüglich x die Fourier-Transformation von $u(x,t)$ d.h. $F(\omega,t) := \mathfrak{F}[u(x,t)](\omega)$.

Hinweis: $\mathfrak{F}[e^{-|x|}](\omega) = \frac{2}{1+\omega^2}$

Lösung: F: $F(\omega,t)$ gilt die gewöhnliche Differentialgleichung.

$$\frac{\partial F}{\partial t}(\omega,t) = -\omega^2 F(\omega,t) - F(\omega,t)$$

d.h. $\frac{\partial F}{\partial t} = -(1+\omega^2) F$

$$\Rightarrow \quad F(\omega,t) = e^{-(1+\omega^2)t} \cdot C(\omega)$$

mit $C(\omega) = F(\omega,0) \cdot e^{(1+\omega^2)0} = F(\omega,0)$

$$F(\omega,0) = \mathfrak{F}[u(x,0)](\omega) = \mathfrak{F}[e^{-|x|}](\omega) = \frac{2}{1+\omega^2}$$

$$\Rightarrow \quad F(\omega,t) = \frac{2}{1+\omega^2} e^{-(1+\omega^2)t}$$

Reihen Teil

4. Aufgabe

Lösen Sie auf $[0,\pi] \times [0,\infty]$ die partielle Differentialgleichung

$$U_t - U_{xx} = 0$$

mit dem Anfangswert $u(x,0) = 13\sin(44x) - 6\sin(4x) + \pi\sin(x)$

und den Randwerten $u(0,t) = 0$, $u(\pi,t) = 0$.

Lösung: Produktansatz $u(x,t) = X(x)\,T(t)$ führt auf

$$T'X - TX'' = 0 \Leftrightarrow \frac{T'}{T} = \frac{X''}{X} = \lambda \in \mathbb{R}$$

I) $X'' - \lambda X = 0 \qquad X(0) = X(\pi) = 0$

Homogene Randbedingungen $\Rightarrow \lambda < 0$ (sonst nur triviale Lösung $X \equiv 0$) Setze $\lambda = -c^2$, $c \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow X'' + c^2 X = 0 \Rightarrow X(x) = a\cos(cx) + b\sin(cx)$, $a,b \in \mathbb{R}$

$X(0) = 0 \Rightarrow a = 0 \Rightarrow X(x) = b\sin(cx)$

$X(\pi) = 0 \Rightarrow b\sin(c\pi) = 0 \qquad b = 0 \Rightarrow X \equiv 0$ (triviale Lsg.)

$\sin(c\pi) = 0 \Rightarrow c = k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow \boxed{X_k(x) = b_k \sin(kx)}$, $k \in \mathbb{Z}$, $b_k \in \mathbb{R}$

II) $T' - \lambda T = 0 \qquad \lambda = -c^2 = -k^2 \Rightarrow T_k' + k^2 T_k = 0$

$\Rightarrow \boxed{T_k = A_k e^{-k^2 t}}$, $A_k \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$

Rechenteil

4. Aufgabe

·) $\boxed{u_k(x,t) = b_k \sin(kx)\, A_k\, e^{-k^2 t}}$, $b_k, A_k \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$

Sei oBdA $b_k = 1$, $k \in \mathbb{Z}$

Superpositionsprinzip anwenden

$$\boxed{u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(kx)\, e^{-k^2 t}}$$

$$u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(kx) \overset{!}{=} 13 \sin(44x) - 6 \sin(4x) + \pi \sin(x)$$

$\Rightarrow$ $A_1 = \pi$, $A_4 = -6$, $A_{44} = 13$, $A_k = 0$ $k \neq 1, 4, 44$

$\Rightarrow$ $\underline{u(x,t) = \pi \sin(x)\, e^{-t} - 6 \sin(4x)\, e^{-16t} + 13 \sin(44x)\, e^{-44^2 t}}$

löst die partielle DGL mit den gegebenen Anfangs- und Randwerten.