Vollständiger Musterlsg ITPDG
SS 02 Juli Klausur

1. Aufgabe

Bestimmen Sie sämtliche Lösungen $u: \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, die den beiden partiellen Differentialgleichungen

$$u_{xx} = 0 \text{ und } u_{tt} = 0$$

gleichzeitig genügen.

Lösung: $u(x,t) = at^2 + bt + c + (d + et + ft^2)x \quad a,b,c,d,e,f \in$

2. Aufgabe

- Für welche $z \in \mathbb{C}$ konvergiert die $\mathcal{Z}$-Transformierte der Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit

$$f_0 := 1 \text{ und } f_n := \frac{n^n}{n!} \text{ für } n \geq 1?$$

Lösung: $|z| > R$ mit $R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{f_{n+1}}{f_n}\right|$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{n^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^n}{n^n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

$$= e$$

3 Aufgabe

Berechnen Sie $\mathcal{L}[\sin 2t](s)$ aus $\mathcal{L}[\cos 2t](s) = \frac{s}{s^2+4}$

Lösung: Mit $\sin 2t = -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\cos 2t$ und

$\mathcal{L}[y'](s) = s\mathcal{L}[y](s) - y(0)$ folgt

$$-2\mathcal{L}[\sin 2t](s) = s\mathcal{L}[\cos 2t](s) - 1 = \frac{s^2}{s^2+4} - 1 = \frac{-4}{s^2+4}$$

Verständnisteil

4. Aufgabe

Bestimmen Sie die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten, die $y_1(x) := e^{-x}$ und $y_2(x) := e^{x}$ als Fundamentalsystem hat.

<u>Lösung:</u> Nullstellen der charakteristischen Gleichung

$$\lambda_1 = 1 \qquad \lambda_2 = -1$$

$\Rightarrow$ charakt. Gleichung $\qquad \lambda^2 - 1 = 0$

$$\Rightarrow \quad y'' - y = 0.$$

5. Aufgabe

Definieren Sie: f ist eine S-Funktion.

Welche der folgenden Funktionen $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind S-Funktionen:

a) $f(x) := \exp\left(-\frac{1}{1+x^2}\right)$ $\qquad$ b) $f(x) = \exp(-1-x^2)$

<u>Lösung:</u> f ist S-Funktion $\Longleftrightarrow |x^k \cdot f^{(n)}| \to 0$ für $|x| \to \infty$ und $\forall n, k \in \mathbb{N}_0$

a) $f(x) \to 1$ für $|x| \to \infty \Rightarrow$ keine S-Fkt.

b) $f^{(n)}(x) = P_n(x)\, e^{-1-x^2}$ mit P_n Polynom

$\Rightarrow |x^k f^{(n)}(x)| = |x^k P_n(x)\, e^{-1-x^2}| \to 0$ für $|x| \to \infty$

d.h. S-Fkt.

Verständnisteil

6. Aufgabe

Welche der beiden Funktionen $y_1(x) := e^{-x}$ und $y_2(x) = \cos x - x$ löst das Anfangswertproblem

$$y'' + 2y' + y = 0 \qquad y(0) = -y'(0) = 1$$

Lösung: $y_1(x) = e^{-x}$ $\quad y_1(0) = 1 \quad y_1'(0) = -1$ ✓

$$(e^{-x})'' + 2(e^{-x})' + e^{-x} = e^{-x}(1 - 2 + 1) = 0$$

y_1 löst das Anfangswertproblem

$y_2(x) = \cos x - x \qquad y_2(0) = 1 \quad y_2'(0) = -1$

also:

$$(\cos x - x)'' + 2(\cos x - x)' + \cos x - x$$
$$= -\cos x - 2\sin x - 2 + \cos x - x = -2\sin x - 2 - x \neq 0$$