Musterlösung April Klausur ITPDG – Rechenteil

(R 1)

Aufgabe 1

$$\vec{y}\,'(t) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \vec{y}(t) + \begin{pmatrix} e^{t} \\ e^{-t} \end{pmatrix}, \quad \vec{y}(0) = \vec{0}$$

Die Anwendung der Laplacetransformation auf das DGL-System führt zu:

$$\mathcal{L}[\vec{y}\,'(t)](s) = \mathcal{L}\left[\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \vec{y}(t) + \begin{pmatrix} e^{t} \\ e^{-t} \end{pmatrix}\right](s)$$

Sei $\vec{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$ und $\mathcal{L}[\vec{y}(t)](s) = \begin{pmatrix} F_1(s) \\ F_2(s) \end{pmatrix}$

Anwendung von Linearität und Ableitungssatz ergibt:

$$\begin{pmatrix} s F_1(s) - y_1(0) \\ s F_2(s) - y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_1(s) \\ F_2(s) \end{pmatrix} + \mathcal{L}\left[\begin{pmatrix} e^{t} \\ e^{-t} \end{pmatrix}\right](s)$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_1(s) \\ F_2(s) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_1(s) \\ F_2(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{s-1} \\ \frac{1}{s+1} \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} s-2 & 0 \\ 0 & s+2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_1(s) \\ F_2(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{s-1} \\ \frac{1}{s+1} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow F_1(s) = \frac{1}{(s-2)(s-1)} = \frac{1}{s-2} - \frac{1}{s-1} \Rightarrow y_1(t) = e^{2t} - e^{t}$$

$$\Rightarrow F_2(s) = \frac{1}{(s+2)(s+1)} = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2} \Rightarrow y_2(t) = e^{-t} - e^{-2t}$$

Aufgabe 2 $u_t = u_{xx}$, $u(x,0) = e^{-|x|}$ (R2)

Anwendung der Fouriertransformation auf die partielle DGL führt zu:

$$\mathcal{F}[u_t(x,t)](\omega) = \mathcal{F}[u_{xx}(x,t)](\omega)$$

Setze $\mathcal{F}[u(x,t)](\omega) = F(\omega,t)$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} F(\omega,t) = -\omega^2 F(\omega,t)$$

$$\Rightarrow F(\omega,t) = \begin{cases} c(\omega)\, e^{-\omega^2 t} & \omega \neq 0 \\ a & \omega = 0 \end{cases} , \quad a \in \mathbb{R} \qquad (I)$$

Verwendung der Anfangsbedingung zur Bestimmung von $c(\omega), a$

1. Fall $\omega \neq 0$

$$F(\omega,0) = \mathcal{F}[u(x,0)](\omega) = \mathcal{F}[e^{-|x|}](\omega) = \frac{2}{1+\omega^2}$$

$$F(\omega,0) \overset{(I)}{=} c(\omega) \quad \Rightarrow \quad \boxed{c(\omega) = \frac{2}{1+\omega^2}}$$

2. Fall $\omega = 0$

$$F(0,0) = 2 , \text{ aus } I \Rightarrow F(0,0) = a \Rightarrow \boxed{a = 2}$$

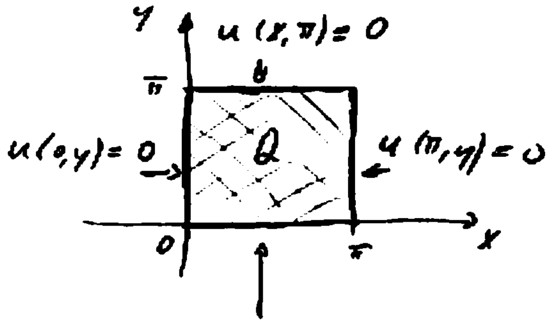
$$\Rightarrow F(\omega,t) = \begin{cases} \frac{2}{1+\omega^2} e^{-\omega^2 t} & \omega \neq 0 \\ 2 & \omega = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{\omega \to 0} F(\omega,t) = \lim_{\substack{\omega \to 0 \\ \omega \neq 0}} \frac{2e^{-\omega^2 t}}{1+\omega^2} = 2 = F(0,t) \checkmark$$

$\Rightarrow F(\omega,t)$ ist stetig für $\omega = 0$.

Aufgabe 3 $\quad u_{xx} + u_{yy} = 0$

(R3)



$u(x,0) = \sin(2x)$

Trennungsansatz

$u(x,y) = X(x)\, Y(y)$

führt die Potenzialgleichung zu:

$$X''(x)\, Y(y) + X(x)\, Y''(y) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda \in \mathbb{R}.$$

Die Randbedingungen werden überführt zu:

$$\underbrace{X(0) = X(\pi) = 0}_{\text{homogene Randbedingungen}} \quad \text{und} \quad Y(\pi) = 0$$

Löse zuerst: $X''(x) - \lambda X(x) = 0, \quad X(0) = X(\pi) = 0$

$$\Rightarrow \boxed{X_k(x) = b_k \sin(kx),} \quad \lambda_k = -k^2, \quad k \in \mathbb{N}$$

$$Y''(y) + \lambda Y(y) = 0,$$

$$\Rightarrow Y''(y) = k^2\, Y(y) \Rightarrow \boxed{Y_k(y) = A_k(x)\, e^{ky} + B_k e^{-ky}}$$

$$\Rightarrow u_k(x,y) = \underbrace{b_k}_{} \sin(kx)\left(A_k e^{ky} + B_k e^{-ky}\right), \quad k \in \mathbb{N}$$

oBdA $b_k = 1$

Superpositionsprinzip $\Rightarrow u(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin(kx)\left(A_k e^{ky} + B_k e^{-ky}\right)$

Bestimmung von A_k, B_k mittels der Randwerte von Ψ (R4)

$$u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin(kx)\left(A_k + B_k\right) \overset{!}{=} \sin(2x)$$

$$\Rightarrow \quad A_k + B_k = \begin{cases} 0 & k \neq 2 \\ 1 & k = 2 \end{cases} \quad (\mathrm{I})$$

$$u(x,\pi) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin(kx)\left(A_k e^{k\pi} + B_k e^{-k\pi}\right) \overset{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow A_k e^{k\pi} + B_k e^{-k\pi} = 0 \quad , \quad k \in \mathbb{N} \quad (\mathrm{II})$$

1. Fall $k \neq 2$

$$\overset{\mathrm{I}}{\Rightarrow} A_k = -B_k \quad \mathrm{II}) \Rightarrow A_k = B_k = 0$$

2. Fall $k = 2$

$$\mathrm{I} \Rightarrow A_2 = 1 - B_2 \quad \mathrm{II}) \Rightarrow (1 - B_2)e^{2\pi} + B_2 e^{-2\pi} = 0$$

$$\Rightarrow B_2 = \frac{e^{2\pi}}{e^{2\pi} - e^{-2\pi}} \qquad A_2 = 1 - \frac{e^{2\pi}}{e^{2\pi} - e^{-2\pi}}$$

$$\Rightarrow A_2 = \frac{-e^{-2\pi}}{e^{2\pi} - e^{-2\pi}}$$

$$\Rightarrow u(x,y) = \sin(2x)\left(\frac{-e^{-2\pi} e^{2y}}{e^{2\pi} - e^{-2\pi}} + \frac{e^{2\pi} e^{-2y}}{e^{2\pi} - e^{-2\pi}}\right)$$

$$\Rightarrow u(x,y) = \sin(2x) \frac{1}{e^{2\pi} - e^{-2\pi}}\left(e^{2(\pi - y)} - e^{-2(\pi - y)}\right)$$

$$\Rightarrow u(x,y) = \frac{\sin(2x)\sinh(2(\pi - y))}{\sinh(2\pi)} \quad //$$

Aufgabe 4a)

R5

Differentiationssatz: $\mathcal{Z}[n a_n](z) = -z \frac{d}{dz} \mathcal{Z}[a_n](z)$
$n \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{Z}[n^2 a_n](z) = -z \frac{d}{dz} \mathcal{Z}[n a_n](z)$$

$$= -z \frac{d}{dz}\left(-z \cdot \frac{d}{dz} \mathcal{Z}[a_n](z)\right)$$

$$= z \frac{d}{dz} \mathcal{Z}[a_n](z) + z^2 \frac{d^2}{dz^2} \mathcal{Z}[a_n](z)$$

Aufgabe 4b) $\mathcal{Z}[b_n](z) = \frac{z}{(z+1)^2} - 2\frac{z^2}{(z+1)^3}$

Es gilt: $\frac{d}{dz}\left(\frac{z}{z+1}\right) = \frac{1}{(z+1)^2}$ und $\frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{z}{z+1}\right) = \frac{-2}{(z+1)^3}$.

$$\mathcal{Z}[b_n](z) = z \frac{1}{(z+1)^2} + z^2 \frac{-2}{(z+1)^3}.$$

$$= z \cdot \frac{d}{dz}\left(\frac{z}{z+1}\right) + z^2 \frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{z}{z+1}\right)$$

$$= \mathcal{Z}[n^2 a_n](z) \text{ mit } \mathcal{Z}[a_n](z) = \frac{z}{z+1}$$

$\overset{\circlearrowleft}{\Rightarrow} a_n = (-1)^n \Rightarrow b_n = n^2(-1)^n$

$\circlearrowleft \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{z^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-1}{z}\right)^n \underset{|z|>1}{=} \frac{1}{1+\frac{1}{z}} = \frac{z}{z+1}$