Rechenteil

1. Aufgabe:

Bezeichnung: $\mathcal{F}(s) = \mathcal{L}[f](s)$

Anwendung der Laplacetransformation liefert:

$$\begin{cases} \mathcal{L}\left[\int_0^t f(u)\,du\right](s) + \mathcal{L}[f'(t)](s) + 2\,\mathcal{L}[f(t)](s) = \frac{1}{s^2} \\ f(0) = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{s}\mathcal{F}(s) + s\mathcal{F}(s) + 1 + 2\mathcal{F}(s) = \frac{1}{s^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{s}\underbrace{(1+s^2+2)}_{=(s+1)^2}\mathcal{F}(s) = \frac{1}{s^2} - 1 = \frac{1-s^2}{s^2} = \frac{(1-s)(1+s)}{s^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \mathcal{F}(s) = \frac{1-s}{s(s+1)}$$

Ansatz: $\mathcal{F}(s) = A\frac{1}{s} + B\frac{1}{s+1}$ $(*)$

$$(*) \Leftrightarrow \quad As + A + Bs = 1 - s$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A + B = -1 \\ A = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = -1-1 = -2 \end{cases}$$

Also gilt

$$\mathcal{F}(s) = \frac{1}{s} - 2\frac{1}{s+1}$$

und

$$\boxed{f(t) = 1 - 2e^{-t}}$$

2. Aufgabe:

① **Produktansatz:** $u(x,t) = X(x) \cdot T(t)$

$$(DGL) \iff X(x)\, T''(t) = X''(x)\, T(t) + 2\, X(x)\, T'(t)$$

$$\iff \frac{T''(t) - 2T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda$$

I) X löst die DGL:

$$X''(x) = \lambda\, X(x) \qquad (*)$$

Lösungsges. von $(*)$: (für $\lambda \neq 0$)

$$X(x) = A\, e^{\sqrt{\lambda}\, x} + B\, e^{-\sqrt{\lambda}\, x}$$

II) T löst die DGL:

$$T''(t) - 2T'(t) = \lambda T(t) \qquad (**)$$

charakt. Gleich.:

$$\mu^2 - 2\mu = \lambda \implies \mu = 1 \pm \sqrt{1+\lambda}$$

Lösungsges. für $(**)$: (für $\lambda \neq -1$)

$$T(t) = C\, e^{(1+\sqrt{1+\lambda})t} + D\, e^{(1-\sqrt{1+\lambda})t}$$

Zusammensetzen liefert die Lösungen

$$\boxed{u(x,t) = X(x) \cdot T(t) = \left(A e^{\sqrt{\lambda}\, x} + B e^{-\sqrt{\lambda}\, x}\right) \cdot \left(C e^{(1+\sqrt{1+\lambda})t} + D\, e^{(1-\sqrt{1+\lambda})t}\right)}$$

② Randbedingungen:

$$\begin{cases} u(0,t) = 0 \\ u(\frac{\pi}{2},t) = 0 \end{cases}$$

Für eine nicht triviale Lösung gilt also

$$\boxed{X(0) = X(\tfrac{\pi}{2}) = 0}$$

Wir benötigen also

$$0 = X(0) = A e^{\sqrt{\lambda}\,0} + B e^{-\sqrt{\lambda}\,0} = A + B \Rightarrow B = -A$$

und

$$0 = X(\tfrac{\pi}{2}) = A e^{\sqrt{\lambda}\frac{\pi}{2}} - A e^{-\sqrt{\lambda}\frac{\pi}{2}} = A\left(e^{\sqrt{\lambda}\frac{\pi}{2}} - e^{-\sqrt{\lambda}\frac{\pi}{2}}\right)$$

Es existieren nicht triviale Lösungen, falls

$$e^{\sqrt{\lambda}\frac{\pi}{2}} - e^{-\sqrt{\lambda}\frac{\pi}{2}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad e^{\sqrt{\lambda}\pi} = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{\lambda}\,\pi = 2\pi i k \quad \text{für ein } k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{\lambda} = 2ik \quad \text{— " —}$$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda = -4k^2 \quad \text{— " —}$$

Diese sind dann

$$X(x) = A e^{2ikx} - A e^{-2ikx} = 2i A \cdot \sin(2kx)$$

$$= \tilde{A} \sin(2kx).$$

Zusammensetzen liefert die Lösungen

$$u(x,t) = \tilde{A} \sin(2kx) \cdot \left(C\, e^{(1+\sqrt{1-4k^2})t} + D\, e^{(1-\sqrt{1-4k^2})t} \right)$$

Also ist

$$\boxed{u(x,t) = \sin(2x) \cdot e^{(1+\sqrt{-3})t} + \sin(4x) \cdot e^{(1+\sqrt{-15})t}}$$

eine Lösung des Rand-AWP aus Aufg. 2.

3. Aufgabe:

Setze $\mathcal{F}(\omega) := \mathcal{F}[f](\omega)$. Dann gilt

$$\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(x-u)\, f(u)\, du}_{= f*f(x)} = \frac{1}{1+x^2} \qquad (*)$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\mathcal{F}[f*f](\omega)}_{= \mathcal{F}(\omega)^2} = \pi\, e^{-|\omega|}$$

Wähle $\mathcal{F}(\omega) := \sqrt{\pi\, e^{-|\omega|}} = \sqrt{\pi}\, e^{-\frac{|\omega|}{2}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \underbrace{\pi\, e^{-\frac{|\omega|}{2}}}_{= \mathcal{F}\left[\frac{1}{1+x^2}\right]\left(\frac{\omega}{2}\right)}$

$$\overset{\text{Skalierungs-eigensch.}}{=} \frac{1}{\sqrt{\pi}}\, 2\, \mathcal{F}\left[\frac{1}{1+(2x)^2}\right](\omega)$$

$$= \mathcal{F}\left[\frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{1+4x^2}\right](\omega),$$

also löst $\boxed{f(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{1+4x^2}}$ die Gleichung $(*)$

4. Aufgabe: Anwendung der Fouriertransformation liefert:

$$(\text{DGL}) \iff U_t(\omega,t) = 4\,(i\omega)^2\, U(\omega,t) + i\omega\, U(\omega,t) \qquad (\text{I})$$

$$(\text{AW}) \iff U(\omega,0) = \mathcal{F}\left[e^{-\frac{1}{2}x^2}\right](\omega) \qquad (\text{II})$$

$$= \sqrt{2\pi}\, e^{-\omega^2/2}$$

Lösungsges. der DGL (I):

$$U(\omega,t) = A_\omega\, e^{(i\omega-4\omega^2)t}$$

Lösung des AWP (I) + (II): $\left(A_\omega = \sqrt{2\pi}\, e^{-\frac{\omega^2}{2}}\right)$

$$\boxed{U(\omega,t) = \sqrt{2\pi}\, e^{-\frac{\omega^2}{2}}\, e^{(i\omega-4\omega^2)t}}$$