Technische Universität Berlin

Fakultät II – Institut für Mathematik SS 04

Dr. Bender 13. Oktober 2004

Oktober – Klausur (Verständnisteil)
Integraltransformationen und partielle Differentialgleichungen für Ingenieure

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Neben einem handbeschriebenen A4 Blatt mit Notizen ist nur die Laplacetabelle zugelassen. Taschenrechner und Formelsammlungen sind nicht zugelassen. Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Dieser Teil der Klausur umfasst die Verständnisaufgaben, sie sollten ohne großen Rechenaufwand mit den Kenntnissen aus der Vorlesung lösbar sein. Geben Sie, wenn nichts anderes gesagt ist, immer eine **kurze Begründung** an.

Die Bearbeitungszeit beträgt **eine Stunde**.

Die Gesamtklausur ist mit 32 von 80 Punkten bestanden, wenn in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens 10 von 40 Punkten erreicht werden.

Korrektur

1	2	3	4	5	6	Σ

1. Aufgabe
8 Punkte

Berechnen Sie die $\mathcal{L}$-Transformierte

$$\mathcal{L}\left[t\left(\int_0^t u^2\, e^{-(t-u)}\, du\right)\right](s).$$

2. Aufgabe
6 Punkte

Es sei $f(n)$ eine Lösung der Differenzengleichung

$$\begin{cases} f(n+3) = f(n) - 2f(n+1), & n \in \mathbb{N}_0, \\ f(0) = 0,\ f(1) = 2,\ f(2) = -3. \end{cases}$$

Bestimmen Sie die $\mathcal{Z}$-Transformierte $F^*(z) = \mathcal{Z}[f](z)$.

3. Aufgabe
8 Punkte

Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind.

(Jede richtige Antwort gibt 2 Punkte, für jede falsche Antwort werden 2 Punkte abgezogen, keine Antwort gibt 0 Punkte, bei negativer Gesamtpunktzahl wird die Aufgabe mit 0 Punkten gewertet. Es sind keine Begründungen notwendig.)

i) Es sei $f(n) = 5$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt

$$\mathcal{Z}[f(n)](z) = 5.$$

ii) Es sei die schnell fallende Funktion h die Übertragungsfunktion des kausalen LTI-Systems S (insbesondere ist $h(t) = 0$ für $t < 0$). Dann gilt für den Frequenzgang F und alle $\omega \in \mathbb{R}$

$$F(\omega) = \mathcal{F}[h](\omega).$$

iii) Es gilt für alle S-Funktionen $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f * (g + h) = f * g + f * h.$$

iv) Die Lösung des AWP

$$y''(t) + 4y'(t) + 3y(t) = \sin(3t) \quad (t \geq 0), \quad y(0) = y'(0) = 0$$

ist von der Form

$$y(t) = \int_0^t g(t-u)\sin(3u)\, du,$$

wobei $\mathcal{L}[g](s) = s^2 + 4s + 3$.

4. Aufgabe

4 Punkte

Zwei stetige Funktionen $f, g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ von exponentieller Ordnung besitzen die gleichen Laplacetransformierten. Sind die beiden Funktionen gleich? Begründen Sie Ihre Antwort!

5. Aufgabe

7 Punkte

Zeigen Sie, dass für zwei S-Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Gleichung

$$(f'' * g)(x) = (f' * g')(x), \qquad x \in \mathbb{R},$$

gilt.

6. Aufgabe

7 Punkte

Es sei $u : (0, \infty) \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$ eine Lösung des AWP

$$\begin{cases} u_t(x,t) = x\, u_x(x,t), & x \in (0,\infty), t \in [0,\infty), \\ u(x,0) = x & x \in (0,\infty). \end{cases}$$

Substituieren Sie die Variable x durch die Variable $y = \frac{1}{2} \log x$ und geben Sie das AWP an, das die Funktion $v(y,t) := u(x,t) = u(e^{2y}, t)$ $(y \in \mathbb{R}, t \in [0, \infty))$ löst.